

Soit $F_n(x)$ l'ensemble des facteurs de longueur n du mot x . Si x est un mot infini la fonction de complexité de x est

$$P(x, n) = \text{Card}(F_n(x))$$

Question 1

Soit x un mot infini. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

- (i) x est ultimement périodique ;
- (ii) $P(x, n) = P(x, n + 1)$ pour un certain n ;
- (iii) $P(x, n) < n + k - 1$ pour un certain n strictement positif, où k est le nombre de lettres apparaissant dans x ;
- (iv) $P(x, n)$ est borné.

Un mot sturmien est un mot s tel que pour tout entier n on ait $P(s, n) = n + 1$. Un facteur spécial à droite d'un mot x est un mot u tel que $u0$ et $u1$ soient également des facteurs de x .

Question 2

Soit s un mot sturmien. Que peut-on déduire de la question 1 ?

Combien de lettres a s ?

Combien s a-t-il de facteurs spéciaux à droite de longueur n , où n est un entier quelconque ?

Question 3

Considérons l'alphabet $\{0; 1\}$ et le morphisme φ défini par $\varphi(0) = 01$ et $\varphi(1) = 0$. Considérons la suite de mots $f_n = \varphi^n(0)$.

Montrer que pour tout n le mot f_n est un préfixe de f_{n+1} et $f_{n+2} = f_{n+1}f_n$.

Le mot limite f est appelé mot de Fibonacci et la suite des longueurs est la suite classique de Fibonacci.

Calculer $P(f, 2)$ et $P(f, 3)$.

Question 4

Montrer que f est un mot sturmien en montrant par exemple les lemmes suivants :

- (i) pour tout mot x les mots $0x0$ et $1x1$ ne sont pas simultanément facteurs de f ;
- (ii) le mot f a au plus un facteur spécial à droite de chaque longueur ;
- (iii)

$$f_{n+2} = g_n \widetilde{f_n} \widetilde{f_n} t_n \quad (n \geq 2)$$

où $g_2 = \varepsilon$ et pour $n \geq 3$

$$g_n = f_{n-3} \cdots f_1 f_0, \quad t_n = \begin{cases} 01 & \text{if } n \text{ est impair,} \\ 10 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(vi) le mot f a exactement un facteur spécial de chaque longueur.

Question 5 : autre caractérisation des mots sturmiens

La hauteur d'un mot x est le nombre $h(x)$ de lettres 1 dans x . Étant donnés deux mots x et y leur différence $\delta(x, y)$ est le nombre $\delta(x, y) = |h(x) - h(y)|$. Un ensemble de mots X est équilibré si

$$x, y \in X, |x| = |y| \Rightarrow \delta(x, y) \leq 1$$

Un mot est équilibré si l'ensemble de ses facteurs l'est.

Question 5,1

Soit X un ensemble factoriel de mots (tout facteur d'un mot de X est dans X). Montrer que si X est équilibré alors pour tout entier n ,

$$\text{Card}(X \cap A^n) \leq n + 1$$

Question 5,2

Soit X un ensemble factoriel de mots. Montrer que X n'est pas équilibré si et seulement s'il existe un palindrome w tel que $0w0$ et $1w1$ soient dans X .

Question 5,3

Soit x un mot infini. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) x est sturmien ;
- (ii) x est équilibré et apériodique.

Question 6 : pente

La pente d'un mot non vide x est le nombre $\pi(x) = h(x)/|x|$. La pente d'un mot infini équilibré est la limite des pentes des préfixes.

Question 6,1

Montrer que pour tous x et y :

$$\pi(xy) = \frac{|x|}{|xy|}\pi(x) + \frac{|y|}{|xy|}\pi(y)$$

Montrer qu'un ensemble factoriel de mots X est équilibré si et seulement si pour tous mots x et y non vides de X :

$$|\pi(x) - \pi(y)| < \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}$$

Question 6,2

Soit x un mot infini équilibré et pour tout $n \geq 1$ soit x_n le préfixe de longueur n de x . Montrer que la suite $(\pi(x_n))_{n \geq 1}$ converge. Cette limite sera appelée pente du mot infini x .

Question 6,3

Calculer la pente du mot de Fibonacci.

Question 6,4

Soit x un mot infini équilibré de pente α . Montrer que pour tout facteur u non vide de x on a

$$|\pi(u) - \alpha| \leq \frac{1}{|u|}$$

Plus précisément, montrer qu'on a soit

$$\alpha|u| < h(u) \leq \alpha|u| + 1 \quad \text{pour tout } u \in F(x)$$

soit

$$\alpha|u| - 1 \leq h(u) < \alpha|u| + 1 \quad \text{pour tout } u \in F(x)$$

et que les inégalités sont strictes si α est rationnel.

Question 6,5

Soit x un mot infini équilibré. Montrer que la pente α de x est rationnelle si et seulement si x est ultimement périodique.

Question 7 : mots mécaniques

Etant donnés deux nombres réels α et ρ avec $0 \leq \alpha \leq 1$, on définit deux mots infinis

$$s_{\alpha,\rho} : \mathbb{N} \longrightarrow A, \quad s'_{\alpha,\rho} : \mathbb{N} \longrightarrow A \quad \text{par}$$

$$s_{\alpha,\rho}(n) = \lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor \quad (n \geq 0)$$

$$s'_{\alpha,\rho}(n) = \lceil \alpha(n+1) + \rho \rceil - \lceil \alpha n + \rho \rceil \quad (n \geq 0).$$

Le mot $s_{\alpha,\rho}$ (resp. $s'_{\alpha,\rho}$) est le mot mécanique inférieur (resp. supérieur). Leur pente est α . Un mot mécanique est rationnel ou irrationnel selon que sa pente est rationnelle ou irrationnelle.

Question 7,1

Montrer que si x et x' sont deux réels, on a

$$x' - x - 1 < \lfloor x' \rfloor - \lfloor x \rfloor < x' - x + 1.$$

Question 7,2

Soit s un mot mécanique de pente α . Montrer que s est équilibré de pente α . Si α est rationnel, montrer que s est périodique. Si α est irrationnel, montrer que s est apériodique.

Question 7,3

Soit s un mot infini équilibré. Montrer que si s est apériodique alors s est mécanique irrationnel et que si s est périodique alors s est mécanique rationnel.

Question 7,4

Déduire de ce qui précède que, si s est un mot infini, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. s est sturmien ;
2. s est équilibré et apériodique ;
3. s est mécanique irrationnel.

Question 7,5

Montrer qu'un mot fini w est facteur d'un mot sturmien si et seulement s'il est équilibré.