Soit $F_n(x)$ l'ensemble des facteurs de longueur n du mot x. Si x est un mot infini la fonction de complexité de x est

$$P(x,n) = Card(F_n(x))$$

Question 1

Soit x un mot infini. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
(i) x est ultimement périodique ;
(ii) $P(x,n) = P(x,n+1)$ pour un certain n ;
(iii) $P(x,n) < n+k-1$ pour un certain n strictement positif, où k est le nombre de lettres apparaissant dans x ;
(iv) $P(x,n)$ est borné.

Un mot sturmien est un mot s tel que pour tout entier n on ait $P(s,n) = n+1$. Un facteur spécial à droite d'un mot x est un mot u tel que $u0$ et $u1$ soient également des facteurs de x.

Question 2

Soit s un mot sturmien. Que peut-on déduire de la question 1 ?
Combien de lettres a s ?
Combien s a-t-il de facteurs spéciaux à droite de longueur n, où n est un entier quelconque ?

Question 3

Considérons l'alphabet $\{0;1\}$ et le morphisme φ défini par $\varphi(0) = 01$ et $\varphi(1) = 0$. Considérons la suite de mots $f_n = \varphi^n(0)$.

Montrer que pour tout n le mot f_n est un préfixe de f_{n+1} et $f_{n+2} = f_{n+1}f_n$.

Le mot limite f est appelé mot de Fibonacci et la suite des longueurs est la suite classique de Fibonacci.

Calculer $P(f,2)$ et $P(f,3)$.

Question 4

Montrer que f est un mot sturmien en montrant par exemple les lemmes suivants :
(i) pour tout mot x les mots $0x0$ et $1x1$ ne sont pas simultanément facteurs de f ;
(ii) le mot f a au plus un facteur spécial à droite de chaque longueur ;
(iii)

$$f_{n+2} = g_n \widetilde{f_n}\widetilde{f_n} t_n \quad (n \geq 2)$$

où $g_2 = \varepsilon$ et pour $n \geq 3$

$$g_n = f_{n-3} \cdots f_1 f_0, \qquad t_n = \begin{cases} 01 & \text{if } n \text{ est impair,} \\ 10 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(vi) le mot f a exactement un facteur spécial de chaque longueur.

Question 5 : autre caractérisation des mots sturmiens

La hauteur d'un mot x est le nombre $h(x)$ de lettres 1 dans x. Étant donnés deux mots x et y leur différence $\delta(x,y)$ est le nombre $\delta(x,y) = |h(x) - h(y)|$. Un ensemble de mots X est équilibré si

$$x, y \in X, |x| = |y| \Rightarrow \delta(x,y) \leq 1$$

Un mot est équilibré si l'ensemble de ses facteurs l'est.

Question 5,1

Soit X un ensemble factoriel de mots (tout facteur d'un mot de X est dans X). Montrer que si X est équilibré alors pour tout entier n,

$$Card(X \cap A^n) \leq n + 1$$

Question 5,2

Soit X un ensemble factoriel de mots. Montrer que X n'est pas équilibré si et seulement s'il existe un palindrôme w tel que $0w0$ et $1w1$ soient dans X.

Question 5,3

Soit x un mot infini. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) x est sturmien ;
(ii) x est équilibré et apériodique.

Question 6 : pente

La pente d'un mot non vide x est le nombre $\pi(x) = h(x)/|x|$. La pente d'un mot infini équilibré est la limite des pentes des préfixes.

Question 6,1

Montrer que pour tous x et y :

$$\pi(xy) = \frac{|x|}{|xy|}\pi(x) + \frac{|y|}{|xy|}\pi(y)$$

Montrer qu'un ensemble factoriel de mots X est équilibré si et seulement si pour tous mots x et y non vides de X :

$$|\pi(x) - \pi(y)| < \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}$$

Question 6,2

Soit x un mot infini équilibré et pour tout $n \geq 1$ soit x_n le préfixe de longueur n de x. Montrer que la suite $(\pi(x_n))_{n\geq 1}$ converge. Cette limite sera appelée pente du mot infini x.

Question 6,3

Calculer la pente du mot de Fibonacci.

Question 6,4

Soit x un mot infini équilibré de pente α. Montrer que pour tout facteur u non vide de x on a

$$|\pi(u) - \alpha| \leq \frac{1}{|u|}$$

Plus précisément, montrer qu'on a soit

$$\alpha|u| < h(u) \leq \alpha|u| + 1 \quad \textit{pour tout } u \in F(x)$$

soit

$$\alpha|u| - 1 \leq h(u) < \alpha|u| + 1 \quad \textit{pour tout } u \in F(x)$$

et que les inégalités sont strictes si α est rationnel.

Question 6,5

Soit x un mot infini équilibré. Montrer que la pente α de x est rationnelle si et seulement si x est ultimement périodique.

Question 7 : mots mécaniques

Etant donnés deux nombres réels α et ρ avec $0 \leq \alpha \leq 1$, on définit deux mots infinis

$$s_{\alpha,\rho} : \mathbb{N} \longrightarrow A, \quad s'_{\alpha,\rho} : \mathbb{N} \longrightarrow A \quad \text{par}$$

$$s_{\alpha,\rho}(n) = \lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor \quad (n \geq 0)$$
$$s'_{\alpha,\rho}(n) = \lceil \alpha(n+1) + \rho \rceil - \lceil \alpha n + \rho \rceil \quad (n \geq 0).$$

Le mot $s_{\alpha,\rho}$ (resp. $s'_{\alpha,\rho}$) est le mot mécanique inférieur (resp. supérieur). Leur pente est α. Un mot mécanique est rationnel ou irrationnel selon que sa pente est rationnelle ou irrationnelle.

Question 7,1
Montrer que si x et x' sont deux réels, on a

$$x' - x - 1 < \lfloor x' \rfloor - \lfloor x \rfloor < x' - x + 1.$$

Question 7,2
Soit s un mot mécanique de pente α. Montrer que s est équilibré de pente α. Si α est rationnel, montrer que s est périodique. Si α est irrationnel, montrer que s est apériodique.

Question 7,3
Soit s un mot infini équilibré. Montrer que si s est apériodique alors s est mécanique irrationnel et que si s est périodique alors s est mécanique rationnel.

Question 7,4
Déduire de ce qui précède que, si s est un mot infini, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. s est sturmien ;
2. s est équilibré et apériodique ;
3. s est mécanique irrationnel.

Question 7,5
Montrer qu'un mot fini w est facteur d'un mot sturmien si et seulement s'il est équilibré.