TD 2 de Langages Formels
MIM2, 2001-2002

Laure Danthony

Eléments de correction

4 octobre 2001

1 Mots conjugués

1. - $u\mathcal{R}u$ est trivial (prendre $t = \varepsilon$ et $s = u$).
   - la symétrie est évidente.
   - Transitivité. Prenons $u\mathcal{R}v$ (avec s, t) et $v\mathcal{R}w$ (avec s', t'). Alors en posant a tel que (faire un dessin) $s = at'$ et $s' = ta$, on obtient $u = st = att'$ et $w = tt'a$ d'où le résultat voulu en prenant $s'' = a$ et $t'' = tt'$).
2. Montrons $u\mathcal{R}v \Leftrightarrow u^m\mathcal{R}v^m$:
   - : $\Rightarrow$ Par hypothèse, on a $u = st$ et $v = ts$. Alors on a le résultat en prenant $s' = (st)^{m-1}$ et $t' = t$.
   - : $\Leftarrow$ Supposons $u^m\mathcal{R}v^m$ à l'aide de s et t. En faisant un dessin, on voit $\exists i, j, s = u^i x$ et $t = yu^j$. avec $i + j + 1 = m$ et $u = xy$. Alors $s = (xy)^i$ et $t = y(xy)^j$. Donc $v^m = ts = y(xy)^j(xy)^i x = (yx)^m$. D'où $v = yx$ et donc $u\mathcal{R}v$
3. Montrons $u\mathcal{R}v \Leftrightarrow \exists w, uw = wu$:
   - : $\Rightarrow$ Si $u\mathcal{R}v$, $u = st$ et $v = ts$, en prenant $w = s$ on a le résultat voulu.
   - : $\Leftarrow$ Si $\exists w, uw = wv$. Alors deux cas sont possibles :
     - Si $|w| > |u|$. Alors on écrit (faire un dessin !) $w = uw'$ et $w = w'v$ et w' est solution de la même équation. On peut donc prendre une solution dont la longeur est strictement plus petite.
     - On peut donc choisir w solution vérifiant $|w| \leq |u|$. On prend w' tel que $u = ww'$ et $v = w'w$ et donc (w, w') fournit $u\mathcal{R}v$.

2 Equation aux mots

- : $\Rightarrow$ Si $u = st, w = ts, v = s(ts)^n$, alors on a bien $uv = vw$.
- : $\Leftarrow$ On a tout d'abord $u^m v = u^{m-1}(uv) = u^{m-1}vw = \ldots = vw^m$. Soit n l'entier tel que $\left|u^{n-1}\right| \leq |v| \leq |u^n|$. On définit s et t par $v = u^{n-1}s$ et $u^n = vt$. On a (faire un dessin !) donc $u = st$, $v = (st)^{n-1}s = s(ts)^{n-1}$. D'autre part, $vw^n = u^n v = vtv$ d'où $w^n = tv = t(st)^{n-1}s = (ts)^n$. Et donc $w = ts$.

3 Codes

REMARQUE 1 $X^{-1}Y = \{z \in \Sigma^* \mid \exists x \in X, xz \in Y\}$

1. On fixe $n \in \mathbb{N}$, on va faire une récurrence descendante sur $k \in [\![1, n]\!]$.
   - Si $k = n$.
     - : $\Rightarrow$ Si $\varepsilon \in U_n$, prendre $u = \varepsilon$.
     - : $\Leftarrow$ Les conditions impliquent $u = \varepsilon$ et donc $\varepsilon \in U_n$.
   - Sinon, soit $1 \leq k < n$. Supposons l'équivalence vérifiée pour les indices $k+1, k+2, \ldots n$.
     - : $\Rightarrow$ Si $\varepsilon \in U_n$ alors par HR on a :

       $$\exists v \in U_{k+1}, \exists i, j \geq 0, vX^i \cap X^j \neq \emptyset, \text{ et } i + j + (k+1) = n$$

       La condition $vX^i \cap X^j \neq \emptyset$ signifie $\exists vx = y, x \in X^i$, et $y \in X^j$. Comme $v \in U_{k+1}$, en appliquant la définition de U on a deux cas :
       - Si $v \in X^{-1}U_k$: par définition on a donc $\exists z \in X$ vérifiant $zv = u \in U_k$. On a alors (faire un dessin !) $ux = zy$, donc comme $ux \in uX^i$ et $zy \in X^{j+1}$, on a alors $uX^i \cap X^{j+1} \neq \emptyset$, avec en plus $i + (j+1) + k = n$. On a donc exhibé un u convenant.
       - Si $v \in U_k^{-1}X$. Alors $\exists u \in U_k$ vérifiant $uv = z \in X$. Donc $uy = zx$ et donc $uX^j \cap X^{i+1} \neq \emptyset$. De plus $j + (i+1) + k = n$. On a donc exhibé un u convenant.
     - : $\Leftarrow$ Supposons $\exists u \in U_k, \ldots$. Alors $ux_1 \ldots x_i = y_1 \ldots y_j$:
       - Si $j = 0$, $i = 0$ et $k = n$ impossible.
       - Si $|u| \geq |y_1|$, d'une part $u = y_1 v$, donc $v \in X^{-1}U_k \subseteq U_{k-1}$. D'autre part $y_1 v x_1 \ldots x_i = y_2 \ldots y_j$. Donc $vX^i \cap X^{j-1} \neq \emptyset$ et $i + j - 1 + (k+1) = n$. Par HR, $\varepsilon \in U_n$.
       - Si $|u| < |y_1|$, alors d'une part $y_1 = uv$ donc $v \in U_k^{-1}X \subseteq U_k$, et d'autre part $ux_1 \ldots x_i = uvy_2 \ldots y_j$ et en simplifiant par u ; $x_1 \ldots x_i = vy_2 \ldots y_j$ donc $X^i \cup vX^{j-1} \neq \emptyset$ et $(j-1) + i + k + 1 = n$. Par HR, $\varepsilon \in U_n$.
2. Montrons X code $\Leftrightarrow$ aucun des U_n ne contient ε.
   - : $\Rightarrow$ Si X n'est pas un code, on a une égalité du type $x_1 \ldots x_p = y_1 \ldots y_q$ avec $x_1 \neq y_1$, et on peut supposer $|y_1| < |x_1|$, *i.e.* $x_1 = y_1 u$, donc on a alors $u \in X^{-1}X$. Comme $u \neq \varepsilon$, $u \in U_1$. Donc $ux_2 \ldots x_p = y_2 \ldots y_q$, ou encore $uX^{p-1} \cap X^{q-1} \neq \emptyset$. D'après la propriété précédente, $\varepsilon in U p + q - 1$.
   - : $\Leftarrow$ Si $\varepsilon \in U_n$ On prend $k = 1$ dans la question précédente. On trouve $u \in U_1$, i, j tels que $i + j + 1 = n$ et $uX^i \cap X^j \neq \emptyset$. Or $u \in U_1 = X^{-1}X \setminus \{\varepsilon\}$ fournit $xu = y$ avec x, y dans X et $x \neq y$. On en déduit $xyX^i \cap xX^j \setminus \emptyset$, *i.e.* $yX^i \cap xX^j \neq \emptyset$ et donc X n'est pas un code.

4 Mots de Lyndon

exercice non traité