Mots et codes

Exercice 1
Soit Σ un alphabet. Deux mots u et v sur Σ sont dits conjugués s'il existe des mots s et t sur Σ tels que $u = st$ et $v = ts$. Ils sont conjugués propres lorsque ni s ni t ne sont vides.

1 - Vérifier que la relation $\mathcal{R}$ définie sur Σ^* par $u \ \mathcal{R} \ v$ si u et v sont conjugués est une relation d'équivalence.

2 - Montrer que, pour tout $m \geq 1$, u et v sont conjugués si et seulement si u^m et v^m sont conjugués.

3 - Montrer que u et v sont conjugués si et seulement s'il existe un mot w tel que $uw = wv$.

Exercice 2
Montrer que u, v et w satisfont l'équation $xy = yz$ si et seulement s'il existe des mots s et t sur Σ et un entier $n \geq 0$ tels que $u = st$, $w = ts$ et $v = s(ts)^n$.

Exercice 3
Soit X un sous-ensemble de Σ^+, on pose

$$\begin{cases} U_1 &= X^{-1}X - \{\epsilon\} \\ U_{n+1} &= X^{-1}U_n \cup U_n^{-1}X \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

1 - Montrer que $(\forall n \geq 1)(\forall k \in [1, n])[(\epsilon \in U_n)$ ssi $(\exists u \in U_k,\ \exists i, j \geq 0$ tels que $uX^i \cap X^j \neq \emptyset$ avec $i + j + k = n)]$.

2 - En déduire que X est un code si et seulement si aucun des sous-ensembles U_n ne contient ϵ.

Exercice 4
Soit Σ un alphabet ayant au moins deux lettres, on suppose que Σ est totalememt ordonné par une relation $\leq$.
On munit Σ^* de l'ordre total lexicographique en posant $u \leq v$ si l'une des clauses suivantes est satisfaite :

- u est un préfixe de v,
- $u = xay$, $v = xbz$ avec $a, b \in \Sigma$, $a < b$ et $x, y, z \in \Sigma^*$.

1 - Montrer que si $v \notin u\Sigma^*, \forall w, z \in \Sigma^*, u < v \Rightarrow uw < vz$.

2 - Prouver que les assertions suivantes sont équivalentes :
i) u est un mot primitif et il est le plus petit de sa classe de conjugués,
ii) u est strictement inférieur à chacun de ses conjugués propres,
iii) u est strictement inférieur à chacun de ses suffixes propres.
Un mot satisfaisant l'une de ces propriétés est appelé mot de Lyndon. On note L l'ensemble des mots de Lyndon sur Σ.

3 - Soient u et v deux mots de Lyndon , montrer que si $u < v$ alors uv est aussi un mot de Lyndon.

4 - Soit $w \in L - \Sigma$, si $w = uv$ où v est le plus long suffixe de w appartenant à L, prouver que $u \in L$.

5 - Montrer que tout mot de Σ^+ s'écrit de manière unique sous la forme $u = u_1u_2 \ldots u_n$ où les u_i sont dans L et $u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n$.

6 - Soit $u = u_1u_2 \ldots u_n$ la factorisation de $u \in \Sigma^+$ comme produit décroissant de mots de Lyndon, prouver que u_n est le plus petit suffixe de u pour l'ordre lexicographique.