

Automates et langages rationnels

Exercice 1

Donner un automate déterministe sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ qui reconnaisse l'ensemble des mots ayant le même nombre de 0 et de 1 et tels que tout préfixe a au plus un 0 de plus que de 1 et au plus un 1 de plus que de 0.

Exercice 2

Donner un automate non déterministe reconnaissant le langage suivant :

$\{u \in (0+1)^* \mid \text{il existe deux } 0 \text{ séparés par une chaîne de longueur } 4i, \text{ pour un } i \geq 0\}$.

Exercice 3

Parmi les langages suivants lesquels sont rationnels ? Justifiez vos réponses.

- a - $\{0^{2n} \mid n \geq 0\}$;
- b - $\{0^m 1^n 0^{m+n} \mid m, n \geq 0\}$;
- c - $\{0^p \mid p \text{ premier}\}$;
- d - l'ensemble des mots qui n'ont pas trois 0 consécutifs ;
- e - l'ensemble des mots qui ont un nombre égal de 0 et de 1 ;
- f - $\{uv\bar{u} \mid u, v \in (0+1)^+, \text{ où } \bar{u} \text{ est le renversé de } u\}$;
- g - $\{u\bar{u}v \mid u, v \in (0+1)^+\}$.

Exercice 4

Soit L un langage rationnel, montrer que les langages suivants sont rationnels :

- a - $\text{CYCLE}(L) = \{uv \mid u, v \in \Sigma^* \text{ et } vu \in L\}$;
- b - $\text{MAX}(L) = \{u \in L \mid \forall v \neq \epsilon, uv \notin L\}$;
- c - $\text{MIN}(L) = \{u \in L \mid \text{aucun préfixe propre de } x \text{ n'est dans } L\}$;
- d - $\text{INIT}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*, uv \in L\}$;
- e - $\bar{L} = \{\bar{u} \mid u \in L\}$.