TD 5 de Langages Formels

MIM2, 2001-2002

Laure Danthony

Eléments de correction

31 octobre 2001

1 Lemme de l'étoile

Soit p un nombre premier $> N$ du lemme de l'étoile. On applique le lemme de l'étoile au mot $u = 0^p 1^{(p+1)\cdots(p+N)}$ et on pompe dans les 0.

2 L^* rationnel

- Si $L = \emptyset$ ou $L = \{\varepsilon\}$, le résultat est trivial.
- Sinon, notons l la longueur du mot u_0 le plus petit de L différent de ε. Posons l_i la longueur du mot de L^* le plus court vérifiant $l_i \equiv i(modl)$. Si l_i existe, on note u_i le mot de longueur l_i correspondant. Alors on obtient

  $$L^* = \bigcup_{i=0}^{l-1} \{0^{l_i+nl}, n \in \mathbb{N}\}$$

  réunion finie d'ensemble rationnels (on dessine facilement un automate reconnaissant ces langages). On montre facilement l'égalité par double inclusion.

3 Ensembles semi-linéaires

On dessine la forme de l'automate minimal de L. Alors on écrit L comme réunion de langages qui correspondent aux états terminaux, en distinguant les sorties avant la première boucle, des sorties au milieu de boucles. Chacun de ces langages est trivialement linéaire.

4 Opération non asociative

non traitée.

5 Quelques opérations sur les langages, le retour

On considère l'AFD reconnaissant $L : \mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ et on va construire les automates reconnaissant les langages :

- $\dfrac{1}{2}L$ est reconnu par $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ avec :
  - $Q' = Q \times \mathcal{P}(Q)$ (on avance,on recule)
  - $q_0' = (q_0, F)$
  - $\delta'((q, X), a) = \big(\delta(q, a), \{p \in Q, \exists b \in \Sigma, \delta(p, b) \in X\}\big)$
  - $F' = \{(q, X), q \in X\}$

  L'idée est de parcourir l'automate dans le sens usuel et en partant des états terminaux en même temps. Si on se retrouve dans un même état en même temps, on est dans le langage.

- $\dfrac{2}{3}L$ est reconnu par $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ avec :
  - $Q' = \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q)^{\mathcal{P}(Q)} \times \mathcal{P}(Q)$
  - $q_0' = (\{q_0\}, \mathrm{Id}, F)$
  - $\delta'((X, f, Y), a) = (X', f', Y')$ où :
    - $X' = \{q \in Q, \exists p \in X, \exists b \in \Sigma, \delta(p, b) = q\}$ (j'avance d'une lettre),
    - $Y' = \{q \in Q, \exists p \in Y, \exists b \in \Sigma, \delta(q, b) = p\}$ (je recule d'une lettre),
    - $f' : \mathcal{P}(Q) \to \mathcal{P}(Q), Z \mapsto \{q \in Q, \exists p \in f(Z), \delta(p, a) = q\}$ ("je lis la lettre a dans le mot u")
  - $F' = \{(X, f, Y), f(X) \cap Y \neq \emptyset\}$

  C'est un peu la même idée que précédemment. La fonction du milieu a pour but de suivre la lecture de u (cette lecture mène d'un ensemble à un ensemble).

- $RACINE(L)$ On utilise le fait que $n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1$ et la même idée que précédemment : $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ avec :
  - $Q' = Q \times \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q)^Q$
  - $q_0' = (q_0, F, f_0)$ où $f_0 : Q \to \mathcal{P}(Q), q \mapsto \{p \in Q, \exists a \in \Sigma, \delta(p, a) = q\}$
  - $F' = \{(q, X, f, q \in X\}$
  - $\delta'((q, X, f), a) = (p, Y, g)$ où :
    - $p = \delta(q, a)$,
    - $Y = \displaystyle\bigcup_{x \in X} f(x)$,
    - $g : q \mapsto \displaystyle\bigcup_{p \in f(q)} \{r \in Q, \exists b, c \in \Sigma, \delta(r, bc) = p\}$.

6 Langages rationnels ou non ?

non traitée.