

Automates et langages rationnels II

Exercice 1

Montrer que le langage $\{0^i 1^j, \text{pgcd}(i, j) = 1\}$ n'est pas rationnel.

Exercice 2

Soit L un sous-ensemble quelconque de 0^* , montrer que L^* est rationnel.

Exercice 3

Un ensemble d'entiers est linéaire s'il est de la forme $\{c + ip, i \in \mathbb{N}\}$. Un ensemble est semi-linéaire s'il est réunion finie d'ensembles linéaires. Soit $L \subseteq 0^*$ un langage rationnel, montrer que $\{i, 0^i \in L\}$ est semi-linéaire.

Exercice 4

On donne la table de multiplication non associative suivante :

*	a	b	c
a	a	a	c
b	c	a	b
c	b	c	a

1 - Donner un automate non déterministe reconnaissant l'ensemble des mots qui ont même valeur lorsqu'on les évalue de gauche à droite et de droite à gauche selon la table.

2 - On note $\text{val}(u)$ le résultat de l'évaluation de gauche à droite du mot u selon la table ci-dessus. Les langages suivants sont-ils rationnels ?

$$L_1 = \{xy \mid \text{val}(x) = \text{val}(y)\}$$

$$L_2 = \{xy \mid |x| = |y| \text{ et } \text{val}(x) = \text{val}(y)\}$$

Exercice 5

Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ . Montrer que les langages suivants sont rationnels.

$$1 - \frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|\}.$$

$$2 - \text{RACINE}(L) = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|^2\}.$$

$$3 - \text{LOG}(L) = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = 2^{|x|}\}.$$

Exercice 6

Parmi les langages suivants lesquels sont rationnels ? Justifiez vos réponses.

$$L_1 = \{x = y + z \mid \text{où } x, y, z \text{ sont des entiers en binaire et } x \text{ est la somme de } y \text{ et } z\}$$

avec $\Sigma = \{0, 1, +, =\}$.

$$L_2 = \{w \in (0+1)^* \mid w \text{ a le même nombre d'occurrences du facteur } 01 \text{ que du facteur } 10\}.$$

$$L_3 = \{0^m 1^n \mid m \neq n\}.$$