

# TD 6 de Langages Formels

## MIM2, 2001-2002

Laure Danthony  
*Éléments de correction*

8 novembre 2001

### 1 Langages engendrés

1. La grammaire génère le langage  $\{a^n b^n c^n\}$ . On démontre ceci par double inclusion.
2. La grammaire engendre les mots de la forme  $uu$ , avec  $u \in \{a, b\}^*$ . On va le montrer : la partie qui consiste à dire que un mot  $u = ww$  est engendré est facile. Par contre, on va montrer l'autre sens.

Notons  $w = uv$  un mot de  $\{a, b\}^*$  et  $W$  sa version en majuscules. Pour  $(s, t) \in \Sigma^*$  avec  $\Sigma = \{a, b, A, B\}$ , on note  $[s, t]$  un élément de  $Melange(s, t)$ , cet ensemble étant défini de la façon suivante :

$$Melange(s, t) = \begin{cases} \{s\} & \text{si } t = \varepsilon \\ \{t\} & \text{si } u = \varepsilon \\ Melange(cs', dt') = \{c\}.Melange(s', dt') \cup \{d\}.Melange(cs', t') & \text{sinon} \end{cases}$$

“J’entrecroise sans permuter les lettres”.

Montrons maintenant par récurrence sur  $n$  la longueur de la dérivation que le mot courant est de la forme  $w\tilde{C}[\overline{V}, u]\tilde{D}$  où  $w = uv$ ,  $v$  étant la version minuscule du mot  $V$ ,  $\tilde{D} \in \{D, \varepsilon\}$ ,  $\tilde{C} \in \{C, \varepsilon\}$ ,  $conjV$  le miroir du mot  $V$  :

- si  $n = 1$ , alors  $S \rightarrow CD$ , alors  $\tilde{C} = C$ ,  $\tilde{D} = D$ ,  $w = \varepsilon$ .
- Supposons que ce soit vrai pour l'ordre  $n - 1$  et montrons que c'est vrai au rang  $n$ . Il suffit pour vérifier règle par règle : par exemple  $Ab \rightarrow Ba$ , on est forcément dans  $[\overline{V}, u]$  et cela reste alors un mélange.

Enfin, si on dérive un mot terminal, on a  $\tilde{C} = \tilde{D} = \varepsilon$ ,  $\overline{V} = \varepsilon$  et comme  $uv = w$ , on en déduit  $w = u$  donc  $uu \in L$ .

3. “Tout préfixe de  $u \in L(G)$  a plus de 'a' que de 'b'.”

### 2 Grammaires de langages

1.  $G = \begin{cases} S \rightarrow aS' \\ S' \rightarrow aS'bS'' \mid \varepsilon \\ S'' \rightarrow cS'' \mid \varepsilon \end{cases}$

$$2. G' = \begin{cases} S \rightarrow aS' \mid bS' \\ S' \rightarrow aS'bS'' \mid \varepsilon \\ S'' \rightarrow cS'' \mid \varepsilon \end{cases}$$

$$3. G = \begin{cases} S \rightarrow [S] \mid a \\ a] \rightarrow ]aa \\ [] \rightarrow \varepsilon \end{cases}$$

4. On utilise  $1 + 3 + \dots + 2n + 1 = n^2$ . On veut construire  $w(n) \in (X + Y)^+$  avec  $|w(n)| = n^2$  et  $|w(n)|_X = 2n + 1$ . Pour passer de  $w(n)$  à  $w(n + 1)$ , il faut recopier chaque  $Y$ , remplacer  $X$  par  $XY$  et ajouter  $XX$ , d'où

$$G = \begin{cases} S \rightarrow [S] \mid X \\ X] \rightarrow ]XY \\ Y] \rightarrow ]Y \\ X \rightarrow a \\ Y \rightarrow a \end{cases}$$

### 3 Grammaires algébriques de langages

1.  $S \rightarrow aSb \mid \varepsilon$ .
2.  $S \rightarrow (S) \mid SS \mid \varepsilon$ .
3.  $S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$ .
4.  $S \rightarrow aSaSbS \mid aSbSaS \mid bSaSaS \mid \varepsilon$ .