TD 6 de Langages Formels

MIM2, 2001-2002

Laure Danthony

Eléments de correction

8 novembre 2001

1 Langages engendrés

1. La grammaire génère le langage $\{a^n b^n c^n\}$. On démontre ceci par double inclusion.
2. La grammaire engendre les mots de la forme uu, avec $u \in \{a,b\}^*$. On va le montrer : la partie qui consiste à dire que un mot $u = ww$ est engendrable est facile. Par contre, on va montrer l'autre sens.

   Notons $w = uv$ un mot de $\{a,b\}^*$ et W sa version en majuscules. Pour $(s,t) \in \Sigma^*$ avec $\Sigma = \{a,b,A,B\}$, on note $[s,t]$ un élément de $Melange(s,t)$, cet ensemble étant défini de la façon suivante :

   $$Melange(s,t) = \begin{cases} \{s\} \text{ si } t = \varepsilon \\ \{t\} \text{ si } u = \varepsilon \\ Melange(cs', dt') = \{c\}.Melange(s', dt') \cup \{d\}.Melange(cs', t') \end{cases}$$

   "J'entrecroise sans permuter les lettres".

   Montrons maintenant par récurrence sur n la longueur de la dérivation que le mot courant est de la forme $w\widetilde{C}[\overline{V}, u]\widetilde{D}$ où $w = uv$, v étant la version minuscule du mot V, $\widetilde{D} \in \{D, \varepsilon\}$, $\widetilde{C} \in \{C, \varepsilon\}$, $conjV$ le miroir du mot V :
   - si $n = 1$, alors $S \to CD$, alors $\widetilde{C} = C$, $\widetilde{D} = D$, $w = \varepsilon$.
   - Supposons que ce soit vrai pour l'ordre $n-1$ et montrons que c'est vrai au rang n. Il suffit pour vérifier règle par règle : par exemple $Ab \to Ba$, on est forcément dans $[\overline{V}, u]$ et cela reste alors un mélange.

   Enfin, si on dérive un mot terminal, on a $\widetilde{C} = \widetilde{D} = \varepsilon$, $\overline{V} = \varepsilon$ et comme $uv = w$, on en déduit $w = u$ donc $uu \in L$.
3. "Tout préfixe de $u \in L(G)$ a plus de 'a' que de 'b'."

2 Grammaires de langages

1. $G = \begin{cases} S \to aS' \\ S' \to aS'bS'' \mid \varepsilon \\ S'' \to cS'' \mid \varepsilon \end{cases}$

2. $G' = \begin{cases} S \to aS' \mid bS' \\ S' \to aS'bS'' \mid \varepsilon \\ S'' \to cS'' \mid \varepsilon \end{cases}$

3. $G = \begin{cases} S \to [S] \mid a \\ a] \to]aa \\ [\,] \to \varepsilon \end{cases}$

4. On utilise $1 + 3 + \ldots + 2n + 1 = n^2$. On veut construire $w(n) \in (X + Y)^+$ avec $|w(n)| = n^2$ et $|w(n)|_X = 2n + 1$. Pour passer de $w(n)$ à $w(n + 1)$, il faut recopier chaque Y, remplacer X par XY et ajouter XX, d'où
$$G = \begin{cases} S \to [S] \mid X \\ X] \to]XY \\ Y] \to]Y \\ X \to a \\ Y \to a \end{cases}$$

3 Grammaires algébriques de langages

1. $S \to aSb \mid \varepsilon$.
2. $S \to (S) \mid SS \mid \varepsilon$.
3. $S \to aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$.
4. $S \to aSaSbS \mid aSbSaS \mid bSaSaS \mid \varepsilon$.