TD 7 de Langages Formels

MIM2, 2001-2002

Laure Danthony

Eléments de correction

15 novembre 2001

1 Grammaires algébriques de langages

1. $S \to (S) \mid SS \mid \varepsilon$
2. $\begin{cases} S \to AB \mid CD \\ A \to aF \mid Fb \\ B \to cB \mid \varepsilon \\ F \to aFb \mid \varepsilon \\ D \to bG \mid Ga \\ C \to aC \mid \varepsilon \\ G \to bGc \mid \varepsilon \end{cases}$
3. $S \to aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$
4. $\begin{cases} S \to aaB \mid aBa \mid \ Baa \mid bA \mid \varepsilon \\ A \to aaS \mid aSa \mid Saa \\ B \to bS \mid Sb \end{cases}$
5. $\begin{cases} S \to S'\# \\ S' \to 0S' \mid 1s'1 \mid \# \end{cases}$
6. S' : pair et S'' : impair : on obtient :
   $\begin{cases} S \to S' \mid S'' \\ S' \to AS'A \mid 0 \mid 1 \\ A \to 0 \mid 1 \\ S'' \to RT \mid TR \\ R \to ARA \mid 0 \\ T \to ATA \mid 1 \end{cases}$
   Les deux dernières règles font en sorte que les mots diffèrent.

2 Automates à pile

1. L'automate suivant reconnaît le langage par pile vide : $\mathcal{M} = (q, \{a, b\}, \{a, b, \#\}, \delta, q, \#)$ avec :

- $\delta(q, a, \#) = (q, a\#)$.
- $\delta(q, b, \#) = (q, b\#)$.
- $\delta(q, a, a) = (q, aa)$ et son symétrique en b.
- $\delta(q, b, a) = (q, \varepsilon)$ et son symétrique en b.
- $\delta(q, \varepsilon, \#) = (q, \varepsilon)$.

2. idem sauf qu'on rajoute la règle $(q, \varepsilon, a) = (q, \varepsilon)$. L'automate alors n'est plus déterministe.
3. Il faut empiler deux fois plus de b que de a. Alors on prend $Q = \{q_0, q_1\}$, $F = \emptyset$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, B\}$ et la fonction de transition suivante :
   - $\delta(q_0, \varepsilon, \gamma_0) = (q_0, \varepsilon)$
   - $\delta(q_0, a, \gamma_0) = (q_0, A\gamma_0)$
   - $\delta(q_0, b, \gamma_0) = (q_0, BB\gamma_0)$
   - $\delta(q_0, a, A) = (q_0, AA)$
   - $\delta(q_0, b, B) = (q_0, BBB)$
   - $\delta(q_0, a, B) = (q_0, \varepsilon)$
   - $\delta(q_0, b, A) = (q_1, \varepsilon)$
   - $\delta(q_1, \varepsilon, A) = (q_1, A)$
   - $\delta(q_1, \varepsilon, \gamma_0) = (q_0, B\gamma_0)$
4. Il faut voir où mettre la retenue si elle existe.
5. Non traitée.

3 Intersection de langages algébriques

Tout d'abord, on n'a pas L et L' algébrique impliquent $L \cap L'$ algébrique : prendre $\{a^n b^m c^m\} \cap \{a^m b^n c^n\} = \{a^n b^n c^n\}$.

Montrons que si L est algébrique et L' rationnel, alors $L \cap L'$ est algébrique. Pour cela, on prend un AP qui reconnaît L par état final, on le note $M = (Q_M, \Sigma, \Gamma, q_0, \gamma_0, \delta_M, F_{\mathcal{M}})$. On prend aussi un automate fini $\mathcal{A} = (Q_A, \Sigma, p_0, \delta_A, F_A)$ qui reconnaît R rationnel.L'automate à pile suivant va reconnaître $L \cap L'$ par état final :

$$\mathcal{M}'' = (Q_A \times Q_M, \Sigma, \Gamma, (p_0, q_0), \gamma_0, \delta, F_A \times Q_F),$$

et la fonction de transition :

$$\delta\big((p, q), a, \alpha\big) = \bigcup\{\big((p', q'), a\big), p' \in \delta_A(p, a), q' \in \delta_M(q, a, \alpha)\}$$

4 Lemme de l'étoile

Rappelons l'énoncé de ce théorème :
Si L est un langage algébrique, alors il existe une constante N, telle que tout mot de L de taille supérieure à N, ce mot z se décompose en $uvwxy$ avec $|vx| \geq 1$, $|vwx| \leq N$, et $\forall i, uv^iwx^iy \in L$.

1. En prenant la constante du lemme, on considère $a^N b^{N+1} c^{N+1}$. Alors la condition $|vwx| \leq n$ implique v et x ne peuvent contenir simultanément des a et des c. Alors on regarde les cas :
   - si v ou x contient deux lettres différentes, en pompant avec $i = 2$ on n'est plus dans L car on obtient une alternance de ces deux lettres.

- si vx ne contient que des a, en pompant avec $i = 2$ on sort du langage.
- si vx ne contient que des b, idem
- si vx ne contient que des c, en pompant avec $i = 0$ on sort.
- si v ne contient que des a et x que des b, on pompe avec $i = 2$ et on sort du langage.
- si v ne contient que des b et x que des c, on pompe avec $i = 0$ et on sort du langage.

Donc le langage L_1 n'est pas algébrique.

2. On considère $a^N b^{N^2}$. On se ramène au cas où v ne contient que des a, alors en pompant on obtient des trucs de la forme $a^{N+i} b^{N^2+j}$ avec $i \geq 1$, $1 \leq j \leq N$, ce qui est impossible à cause des carrés.
3. C'est une preuve identique à celle utilisée pour montrer que ce langage n'est pas rationnel.
4. La démo est similaire à celle de L_1 avec $a^N b^N c^N$
5. La preuve est similaire à celle de L_2.

5 Non clôture par complémentaire

Non traitée