

TD 7 de Langages Formels  
MIM2, 2001-2002

Laure Danthony  
*Éléments de correction*

15 novembre 2001

## 1 Grammaires algébriques de langages

1.  $S \rightarrow (S) \mid SS \mid \varepsilon$

2. 
$$\begin{cases} S \rightarrow AB \mid CD \\ A \rightarrow aF \mid Fb \\ B \rightarrow cB \mid \varepsilon \\ F \rightarrow aFb \mid \varepsilon \\ D \rightarrow bG \mid Ga \\ C \rightarrow aC \mid \varepsilon \\ G \rightarrow bGc \mid \varepsilon \end{cases}$$

3.  $S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$

4. 
$$\begin{cases} S \rightarrow aaB \mid aBa \mid Baa \mid bA \mid \varepsilon \\ A \rightarrow aaS \mid aSa \mid Saa \\ B \rightarrow bS \mid Sb \end{cases}$$

5. 
$$\begin{cases} S \rightarrow S' \# \\ S' \rightarrow 0S' \mid 1s'1 \mid \# \end{cases}$$

6.  $S'$  : pair et  $S''$  : impair : on obtient :

$$\begin{cases} S \rightarrow S' \mid S'' \\ S' \rightarrow AS'A \mid 0 \mid 1 \\ A \rightarrow 0 \mid 1 \\ S'' \rightarrow RT \mid TR \\ R \rightarrow ARA \mid 0 \\ T \rightarrow ATA \mid 1 \end{cases}$$

Les deux dernières règles font en sorte que les mots diffèrent.

## 2 Automates à pile

1. L'automate suivant reconnaît le langage par pile vide :  $\mathcal{M} = (q, \{a, b\}, \{a, b, \#\}, \delta, q, \#)$   
avec :

- $\delta(q, a, \#) = (q, a\#)$ .
  - $\delta(q, b, \#) = (q, b\#)$ .
  - $\delta(q, a, a) = (q, aa)$  et son symétrique en  $b$ .
  - $\delta(q, b, a) = (q, \varepsilon)$  et son symétrique en  $b$ .
  - $\delta(q, \varepsilon, \#) = (q, \varepsilon)$ .
2. idem sauf qu'on rajoute la règle  $(q, \varepsilon, a) = (q, \varepsilon)$ . L'automate alors n'est plus déterministe.
  3. Il faut empiler deux fois plus de  $b$  que de  $a$ . Alors on prend  $Q = \{q_0, q_1\}$ ,  $F = \emptyset$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Gamma = \{A, B\}$  et la fonction de transition suivante :
    - $\delta(q_0, \varepsilon, \gamma_0) = (q_0, \varepsilon)$
    - $\delta(q_0, a, \gamma_0) = (q_0, A\gamma_0)$
    - $\delta(q_0, b, \gamma_0) = (q_0, BB\gamma_0)$
    - $\delta(q_0, a, A) = (q_0, AA)$
    - $\delta(q_0, b, B) = (q_0, BBB)$
    - $\delta(q_0, a, B) = (q_0, \varepsilon)$
    - $\delta(q_0, b, A) = (q_1, \varepsilon)$
    - $\delta(q_1, \varepsilon, A) = (q_1, A)$
    - $\delta(q_1, \varepsilon, \gamma_0) = (q_0, B\gamma_0)$
  4. Il faut voir où mettre la retenue si elle existe.
  5. Non traitée.

### 3 Intersection de langages algébriques

Tout d'abord, on n'a pas  $L$  et  $L'$  algébrique impliquent  $L \cap L'$  algébrique : prendre  $\{a^n b^m c^m\} \cap \{a^m b^n c^n\} = \{a^n b^n c^n\}$ .

Montrons que si  $L$  est algébrique et  $L'$  rationnel, alors  $L \cap L'$  est algébrique. Pour cela, on prend un AP qui reconnaît  $L$  par état final, on le note  $M = (Q_M, \Sigma, \Gamma, q_0, \gamma_0, \delta_M, F_M)$ . On prend aussi un automate fini  $\mathcal{A} = (Q_A, \Sigma, p_0, \delta_A, F_A)$  qui reconnaît  $R$  rationnel. L'automate à pile suivant va reconnaître  $L \cap L'$  par état final :

$$\mathcal{M}'' = (Q_A \times Q_M, \Sigma, \Gamma, (p_0, q_0), \gamma_0, \delta, F_A \times Q_F),$$

et la fonction de transition :

$$\delta((p, q), a, \alpha) = \bigcup \{((p', q'), a), p' \in \delta_A(p, a), q' \in \delta_M(q, a, \alpha)\}$$

### 4 Lemme de l'étoile

Rappelons l'énoncé de ce théorème :

Si  $L$  est un langage algébrique, alors il existe une constante  $N$ , telle que tout mot de  $L$  de taille supérieure à  $N$ , ce mot  $z$  se décompose en  $uvwxy$  avec  $|vx| \geq 1$ ,  $|vwx| \leq N$ , et  $\forall i, uv^i wx^i y \in L$ .

1. En prenant la constante du lemme, on considère  $a^N b^{N+1} c^{N+1}$ . Alors la condition  $|vwx| \leq n$  implique  $v$  et  $x$  ne peuvent contenir simultanément des  $a$  et des  $c$ . Alors on regarde les cas :
  - si  $v$  ou  $x$  contient deux lettres différentes, en pompant avec  $i = 2$  on n'est plus dans  $L$  car on obtient une alternance de ces deux lettres.

- si  $vx$  ne contient que des  $a$ , en pompant avec  $i = 2$  on sort du langage.
- si  $vx$  ne contient que des  $b$ , idem
- si  $vx$  ne contient que des  $c$ , en pompant avec  $i = 0$  on sort.
- si  $v$  ne contient que des  $a$  et  $x$  que des  $b$ , on pompe avec  $i = 2$  et on sort du langage.
- si  $v$  ne contient que des  $b$  et  $x$  que des  $c$ , on pompe avec  $i = 0$  et on sort du langage.

Donc le langage  $L_1$  n'est pas algébrique.

2. On considère  $a^N b^{N^2}$ . On se ramène au cas où  $v$  ne contient que des  $a$ , alors en pompant on obtient des trucs de la forme  $a^{N+i} b^{N^2+j}$  avec  $i \geq 1$ ,  $1 \leq j \leq N$ , ce qui est impossible à cause des carrés.
3. C'est une preuve identique à celle utilisée pour montrer que ce langage n'est pas rationnel.
4. La démo est similaire à celle de  $L_1$  avec  $a^N b^N c^N$
5. La preuve est similaire à celle de  $L_2$ .

## 5 Non clôture par complémentaire

Non traitée