

## Grammaires algébriques et automates à pile

### Exercice 1

Donner des grammaires algébriques engendrant les langages suivants :

- 1 - l'ensemble des mots bien parenthésés;
- 2 -  $\{a^i b^j c^k, i \neq j \text{ ou } j \neq k\}$ ;
- 3 - l'ensemble des mots sur  $\{a, b\}$  ayant le même nombre d'occurrences de  $a$  que de  $b$ ;
- 4 - l'ensemble des mots sur  $\{a, b\}$  ayant deux fois plus de  $a$  que de  $b$ ;
- 5 -  $\{w\#\bar{w}\#, w \in (0+1)^*\}$ ;
- 6 - l'ensemble des mots de  $(0+1)^*$  qui ne sont pas de la forme  $ww$ .

### Exercice 2

Donner des automates à piles reconnaissant les langages suivants.

$$L_1 = \{u \in \{a, b\}^*, |u|_a = |u|_b\}.$$

$$L_2 = \{u \in \{a, b\}^*, |u|_a \geq |u|_b\}.$$

$$L_3 = \{u \in \{a, b\}^*, |u|_a = 2|u|_b\}.$$

$$L_4 = \{\text{bin}(i)\#\text{bin}(i+1), \text{ où } \text{bin}(i) \text{ est l'écriture binaire de } i\}.$$

$$L_5 = \{a^i b^j c^k, i \neq j \text{ ou } j \neq k\}.$$

### Exercice 3

Montrer que si  $L$  est algébrique et si  $R$  est rationnel le langage  $L \cap R$  est algébrique.

Donner deux langages algébriques dont l'intersection n'est pas algébrique.

### Exercice 4

Montrer que les langages suivants ne sont pas algébriques.

$$L_1 = \{a^i b^j c^k, i < j < k\}.$$

$$L_2 = \{a^i b^j, j = i^2\}.$$

$$L_3 = \{a^i, i \text{ premier}\}.$$

$$L_4 = \{a^n b^n c^m, n \leq m \leq 2n\}.$$

$$L_5 = \{a^{n^2}, n \geq 0\}.$$

### Exercice 5

Montrer que le langage  $L = \{ww, w \in \{a, b\}^*\}$  n'est pas algébrique alors que son complémentaire l'est. On donnera un automate à pile.