Langages algébriques

Exercice 1
Montrer que le langage $L = \{ww,\ w \in \{a,b\}^*\}$ n'est pas algébrique alors que son complémentaire l'est. On donnera un automate à pile.

Exercice 2
Soit $\Sigma = \{a,b\}$ et soit n un entier positif.
1 - Donner un automate à pile déterministe qui reconnaisse le langage

$$L_n = \{a^m b^k a^m b^k \mid m \geq 1,\ 1 \leq k \leq n\}$$

2 - Le langage $L = \bigcup_{n \geq 1} L_n$ est-il algébrique ?

Exercice 3
On rappelle que $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^*,\ \exists y \in \Sigma^* \text{ tel que } xy \in L \text{ et } |x| = |y|\}$, L étant un langage sur Σ.
1 - Montrer que le langage $L = \{a^n b^n c^m d^{3m},\ n,m \geq 1\}$ est algébrique.
2 - Calculer $\frac{1}{2}L$.
3 - Montrer que $\frac{1}{2}L$ n'est pas algébrique.

Exercice 4
Soient Σ un alphabet et u,v deux mots sur Σ. On appelle mélange des mots u et v, et on note $\mathrm{Mel}(u,v)$ l'ensemble des mots de Σ^* définis par :
si $u = \epsilon$, $\mathrm{Mel}(u,v) = \{v\}$,
si $v = \epsilon$, $\mathrm{Mel}(u,v) = \{u\}$,
si $u = xu'$ et $v = yv'$ avec $x,y \in \Sigma$, $\mathrm{Mel}(u,v) = x.\mathrm{Mel}(u',v) \cup y.\mathrm{Mel}(u,v')$.
Si L et L' sont deux langages, on définit $\mathrm{Mel}(L,L') = \bigcup_{u \in L, v \in L'} \mathrm{Mel}(u,v)$.

1 - On prend $\Sigma = \{a,b\}$ et on considère les deux langages L et L' dénotés respectivement par $(aa)^*$ et $(bbb)^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L,L')$ est rationnel.

2 - Le mélange de deux langages rationnels est-il rationnel ?

3 - Soient $\Sigma = \{a,b,c\}$, $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et L' le langage dénoté par c^*. Montrer que $\mathrm{Mel}(L,L')$ est algébrique.

4 - (1) Montrer que le mélange d'un langage rationnel et d'un langage algébrique est algébrique.
4 - (2) Est-ce que le mélange de deux langages algébriques est algébrique ?

Exercice 5*
Soit L un langage algébrique. Montrer que le langage $CYCLE(L)$ est aussi algébrique où

$$CYCLE(L) = \{uv \mid vu \in L \text{ et } u,v \in \Sigma^*\}.$$

Exercice 6**
1 - Montrer que tout langage algébrique ne contenant pas le mot vide est engendré par une grammaire $G = (V,T,P,S)$ dont toute les productions sont de la forme $A \longrightarrow a$, $A \longrightarrow aB$ ou $A \longrightarrow aBC$ avec $a \in T$ et $A,B,C \in V$.
2 - En déduire que tout langage algébrique ne contenant pas ϵ est engendré par une grammaire dont les parties droites des productions ne contiennent pas deux variables consécutives.