Calcul des prédicats

Laure Danthony

Table des matières

1 Syntaxe du calcul des prédicats

1.1 Lexique

On considère :

1. un ensemble infini dénombrable de symboles de **prédicats** unaires ($r^{1,0}, r^{1,1}, \dots$), binaires ($r^{2,0}, \dots$, par exemple "="), n-aires
2. un ensemble infini dénombrable de **variables propositionnelles** : p, q, r, ... (booléens)
3. un ensemble infini dénombrable de **fonctions** unaires, binaires (par exemple "+"),n-aires ...
4. un ensemble infini dénombrable de **constantes d'individu** : a, b, c, ...
5. un ensemble infini dénombrable de **variables individuelles** : x, y, z, ...
6. les **connecteurs** $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
7. les **quantificateurs** $\{\forall x, \exists x, \forall y, \dots\}$
8. les **parenthèses**.

DÉFINITION 1 (TERMES)
Les **termes** sont les arbres finis non vides étiquetés par des symboles de constantes, de fonctions, ou de variables individuelles tels que :

- les feuilles sont étiquetées par un symbole de constante ou de variable individuelle ;
- un noeud interne ayant n fils est étiqueté par un symbole de fonction n-aire.

EXEMPLE 1 $+(0,1)$ *est un terme.*

DÉFINITION 2
Une **formule atomique** est un arbre non vide étiqueté qui est :

- réduit à la feuille p si p est une variable prépositionnelle ;
- si $t_1, \dots, t_n$ sont des termes et $r^{n,i}$ un prédicat n-aire, l'arbre dont la racine est $r^{n,i}$ et les fils de la racine sont $t_1, \dots, t_n$.

EXEMPLES 2
$<(0,1)$ *et* $=\big(x, +(y,a)\big)$ *sont des formules atomiques.*

DÉFINITION 3
Les **formules** sont les arbres dyadiques tels que :

1. si un nœud a 2 fils, il est étiqueté par $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ ou $\leftrightarrow$;
2. si un nœud a un seul fils, il est étiqueté par $\neg$, $\forall x$ ou $\exists x$;
3. si un noeud est une feuille, il est étiqueté par une formule atomique.

Remarque 1 Les formules atomiques qui sont les feuilles des formules ne sont pas "démontées", par exemple $=\big(x, +(y,a)\big)$ est laissée telle quelle (on ne construit pas l'arbre correspondant).

1.2 Variables libres, variables liées

Définition 4
Soit $Var(F)$ l'ensemble des variables de F. On construit $Lib(F)$ l'ensemble des variables libres d'une formule F par induction :

- si F est atomique, $Lib(F) = Var(F)$;
- si F est de la forme $\neg G$, alors $Lib(F) = Lib(G)$
- $Lib(F \vee G) = Lib(F \wedge G) = Lib(F \rightarrow G) = Lib(F) \cup Lib(G)$
- $Lib(\exists x F) = Lib(\forall x F) = Lib(F) - \{x\}$.

On appelle **énoncé** ou **formule close** une formule F telle que $Lib(F) = \emptyset$

Fait 1 *Toute occurence de x dans $\forall x F$ et $\exists x F$ est liée.*

Fait 2 *Toute occurence liée de x dans une sous-formule de F est liée dans F.*

2 Sémantique

2.1 Interprétation d'un langage

Définition 5
Une **interprétation** $\mathfrak{I}$ du langage L se compose de :

1. un ensemble D non vide : le **domaine**
2. pour chaque individu a, on se donne un objet $\widetilde{a}$ appartenant à D.
3. pour chaque symbole fonctionnel f n-aire, on se donne une opération : $\widetilde{f} : D^n \mapsto D$.
4. pour chaque symbole relationnel r n-aire, on se donne une relation : $\widetilde{r} : D^n \mapsto \{0, 1\}$

Remarque 2 $\mathfrak{I}$ s'appelle aussi une **structure** ou **réalisation** du langage L.

Exemple 3 *Si on se donne le langage qui contient : r un prédicat unaire, f une fonction unaire, g, h deux fonctions binaires, c, d des constantes d'individus, on peut par exemple prendre pour $\mathfrak{I}$ les données suivantes : $D = \mathbb{N}$, $\widetilde{f} = s$ (la fonction successeur), $\widetilde{g} = +$, $\widetilde{h} = *$, $\widetilde{c} = 0$, $\widetilde{d} = 1$*

2.2 Evaluation des termes

DÉFINITION 6
Soit une interprétation $\mathfrak{I}$ de domaine D. On appelle **assignation** une fonction σ qui attribue à chaque valeur x un élément de D : $\sigma(x) \in D$.

DÉFINITION 7
Soit une interprétation $\mathfrak{I}$ de domaine D. On appelle **terme** assigné un couple (t, σ) noté $t[\sigma]$ où t est un terme et σ une assignation.

NOTATION $\mathfrak{I} \models t[\sigma] = a$ signifie que, dans l'interprétation $\mathfrak{I}$, la valeur du terme assigné $t[\sigma]$ est a, $a \in D$.

Alors, l'évaluation des termes s'effectue de la façon suivante :

- si t est un individu a, alors $\mathfrak{I} \models t[\sigma] = \widetilde{a}$
- si t est une variable x, alors $\mathfrak{I} \models t[\sigma] = \sigma(x)$
- si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ et si $\mathfrak{I} \models t_1[\sigma] = a_1$, $\ldots$ $\mathfrak{I} \models t_n[\sigma] = a_n$, alors $\mathfrak{I} \models t[\sigma] = \widetilde{f}(a_1, \ldots, a_n)$.

  Ainsi, chaque terme assigné reçoit une valeur dans D à l'aide de σ.

EXEMPLE 4 *En reprenant le $\mathfrak{I}$ de l'exemple précédent, le valeur dans l'interprétation $\mathfrak{I}$ du terme $g(c, d)$ est 1, du terme $g(d, x)$ avec l'assignation $\sigma(x) = 7$ est 8.*

FAIT 3 *La valeur d'un terme t ne dépend que de l'assignation des variables de t. En particulier, si t est clos, sa valeur $t[\sigma]$ ne dépend pas de σ.*

2.3 Sémantique du calcul des prédicats

Les formules assignées notées $F[\sigma]$ reçoivent une valeur de vérité.

NOTATION $\mathfrak{I} \models F[\sigma]$ signifie que, dans l'interprétation $\mathfrak{I}$, $F[\sigma]$ prend la valeur 1. On dit alors que F est **vérifiée** ou **satisfaite** par l'assignation σ dans $\mathfrak{I}$. Dans le cas contraire, on dit que F est **falsifiée** par σ dans $\mathfrak{I}$.

DÉFINITION 8
F est dite **valide** dans $\mathfrak{I}$ si elle est vérifiée *quelle que soit l'assignation σ*.

NOTATION Etant donnée une variable x, un élément a de D et une assignation σ, on note $(a/x)\sigma$ l'assignation définie par : $(a/x)\sigma(x) = a$ et $(a/x)\sigma(y) = \sigma(y)$ pour $y \neq x$. $(a/x)\sigma$ coïncide avec σ sauf peut-être en x où elle vaut a.

Alors, l'évaluation des formules s'effectue de la façon suivante :

- Si F est atomique avec $F = p$, alors $\mathfrak{I} \models p \Leftrightarrow \widetilde{p} = 1$
- Si F est atomique avec $F = r(t_1, \ldots t_n)$ et $\mathfrak{I} \models t_1[\sigma] = a_1$, $\ldots$, $\mathfrak{I} \models t_n[\sigma] = a_n$, alors $\mathfrak{I} \models F[\sigma] \Leftrightarrow \widetilde{r}(a_1, \ldots, a_n = 1)$
- $\mathfrak{I} \models (F \vee G)[\sigma] \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models F[\sigma]$ ou $\mathfrak{I} \models G[\sigma]$

- $\mathfrak{I} \models (F \wedge G)[\sigma] \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models F[\sigma]$ et $\mathfrak{I} \models G[\sigma]$
- $\mathfrak{I} \models (F \rightarrow G)[\sigma] \Leftrightarrow \mathfrak{I} \not\models F[\sigma]$ ou $\mathfrak{I} \models G[\sigma]$
- $\mathfrak{I} \models (\neg F)[\sigma] \Leftrightarrow \mathfrak{I} \not\models F[\sigma]$
- $\mathfrak{I} \models (\exists x\ F)[\sigma] \Leftrightarrow$ il existe $a \in D$ tel que $\mathfrak{I} \models F[(a/x)\sigma]$
- $\mathfrak{I} \models (\forall x\ F)[\sigma] \Leftrightarrow$ pour tout $a \in D, \mathfrak{I} \models F[(a/x)\sigma]$

FAIT 4 *La valeur de vérité de $F[\sigma]$ ne dépend que des valeurs des variables libres de F.*

FAIT 5 *Une formule close A est donc soit valide dans l'interprétation $\mathfrak{I}$ (ce qui est noté $\mathfrak{I} \models A$), soit falsifiée par $\mathfrak{I}$ (on note alors $\mathfrak{I} \not\models A$).*

DÉFINITION 9
On appelle **conséquence** de σ un énoncé A qui est valide dans tout modèle de Σ.

2.4 Notation simplifiée des formules

- Soit F une formule dont les variables libres appartiennent à la liste $x_1, \ldots, x_n$, ce que l'on note $F[x_1, \ldots, x_n]$.
- Donner à $x_1, \ldots, x_n$ des valeurs $a_1, \ldots, a_n$ de D, c'est faire une assignation partielle qui suffit pour tester toute formule assignée $F[\sigma]$ où $\sigma(x_i) = a_i$ pour $i \in [1, n]$.
- $\mathfrak{I} \models F[\sigma]$, avec $\sigma(x_i) = a_i$ pour $i \in [1, n]$, sera notée d'une manière plus simple $\mathfrak{I} \models F[a_1, \ldots, a_n]$.

On peut encore alléger l'écriture: parmi les x_i, seuls ceux qui sont réellement dans $Lib(F)$ comptent. Les deux dernières lignes de la définition de la satisfaction d'une formule deviennent alors:

- $\mathfrak{I} \models (\exists x\ F)[x, a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow$ il existe $a \in D$ tel que $\mathfrak{I} \models F[a, a_1, \ldots, a_n]$
- $\mathfrak{I} \models (\forall x\ F)[x, a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow$ pour tout $a \in D, \mathfrak{I} \models F[a, a_1, \ldots, a_n]$

3 Méthode des séquents

3.1 De nouveaux séquents

On introduit ici de nouveaux séquents pour les connecteurs $\forall$ et $\exists$:

"quel que soit" : $(g)(\gamma) : \dfrac{\Gamma, A[t], \forall x\ A[x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\ A[x] \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (d)(\delta) : \dfrac{\Gamma \Rightarrow A[a], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x\ A[x], \Delta}$

"il existe" : $(g)(\delta) : \dfrac{\Gamma, A[a] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\ A[x] \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (d)(\gamma) : \dfrac{\Gamma \Rightarrow A[t], \exists x\ A[x]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\ A[x]}$

où t est un terme quelconque et a une constante d'individu "inédite".

REMARQUE 3 Les règles δ sites "passives" sont à utiliser avant les règles γ dites "actives".

3.2 Notion d'univers de Bertrand

DÉFINITION 10
Etant donné un langage L ayant au moins un symbole d'individu(sinon on en rajoute un arbitraire, c_0, on appelle **univers de Herbrand de L** l'ensemble H de tous les termes clos de L (par exemple si a est une constante d'individu de L, ainsi que f et g des fonctions de L, l'ensemble H est constitué de a, $f(a)$, $f(g(a))$, $\dots$)

DÉFINITION 11
Une **réalisation de Herbrand** de L est une réalisation de L de domaine H telle que l'interprétation de chaque individu soit lui-même, et l'interprétation de chaque symbole n-aire est la fonction qui associe aux termes clos $t_1, \dots, t_n$ de H le terme clos $f(t_1, \dots t_n)$ de H. La seule latitude qu'on ait pour faire varier une réalisation de Bertrand est l'interprétation des prédicats.

REMARQUE 4 La seule utilité de cette notion est qu'elle sert à la preuve du théorème de complétude des séquents dans le calcul propositionnel.

3.3 Théorèmes

THÉORÈME 1 (ADÉQUATION) *Tout séquent prouvable est valide.*

THÉORÈME 2 (COMPLÉTUDE) *Tout séquent valide est prouvable.*

COROLLAIRE 1 *On essaie de faire la preuve d'un séquent. On construit l'arbre en largeur. 3 cas peuvent se présenter :*

- *Chaque chemin se ferme sur une feuille axiome après moins de b niveaux. L'arbre est fini, fermé, et le séquent est prouvable.*
- *Un chemin ne se termine pas sur une feuille axiome au b-ième niveau. Il existe un contremodèle de S de domaine $\mathcal{D} = \{t_0, \dots t_p\}$ où les t_0, $\dots$, t_p sont apparus le long du chemin.*
- *Aucun chemin ne se termine, l'arbre est infini. Il existe une branche infinie et il existe un contremodèle de domaine $\mathcal{D} = \{t_0, \dots t_n, \dots\}$ où les t_0, $\dots$, t_n $\dots$ sont apparus le long du chemin.*