

# Calcul Propositionnel

Laure Danthony

## Contents

<b>1</b>	<b>Logique propositionnelle</b>	<b>2</b>
1.1	Lexique . . . . .	2
1.2	Valeurs de vérité . . . . .	2
1.3	Connecteurs universels . . . . .	3
1.4	Formes normales . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Un théorème important</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Notion de modèle</b>	<b>3</b>
3.1	Définitions . . . . .	3
3.2	Quelques propositions . . . . .	4
3.3	Schéma d'inférence . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Méthode des séquents (Gentzen, 1936)</b>	<b>4</b>
4.1	Introduction . . . . .	4
4.1.1	Définitions . . . . .	4
4.1.2	Premiers résultats . . . . .	5
4.2	Méthode des séquents sans coupure . . . . .	5
4.2.1	Introduction à la méthode . . . . .	5
4.2.2	Théorèmes . . . . .	5
4.3	Méthode des séquents avec coupure . . . . .	6
4.4	Extension : les séquents infinis . . . . .	6
4.4.1	Les séquents infinis . . . . .	6
4.4.2	Les ensembles d'Hintikka (1955) . . . . .	7
<b>5</b>	<b>La méthode de coupure (ou de résolution)</b>	<b>8</b>
5.1	Introduction à la méthode . . . . .	8
5.2	Théorème important et perspectives . . . . .	8
5.2.1	Complétude de la méthode . . . . .	8
5.2.2	Programmation logique . . . . .	8

# 1 Logique propositionnelle

## 1.1 Lexique

On considère :

1.  $p_0, p_1, \dots$  ensemble infini dénombrable de **variables propositionnelles** (ou variables);
2. les connecteurs  $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
3. les parenthèses

### DÉFINITION 1

Les **formules** sont les arbres dyadiques (0, 1 ou 2 fils) tels que :

1. si un nœud a deux fils, il est étiqueté par  $\vee, \wedge, \rightarrow$  ou  $\leftrightarrow$
2. s'il a un fils, il est étiqueté par  $\neg$
3. si c'est une feuille, il est étiqueté par une variable.

## 1.2 Valeurs de vérité

On considère  $V = \{0, 1\}$  (0 = faux et 1 = vrai par convention). A chaque symbole logique, on associe une opération sur  $V$  décrite par une table de valeurs :

$p$	$\neg p$	$q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1

PROPOSITION 1  $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

### DÉFINITION 2

1. On appelle **valuation** une fonction qui assigne une valeur 0 ou 1 à chaque variable et qui se prolonge aux formules.
2. On dit que  $\sigma$  **vérifie** la formule  $\Phi$  si  $\sigma(\Phi) = 1$ , la **falsifie** sinon.

### DÉFINITION 3

1. Les formules toujours vérifiées (pour toute distribution de vérité) sont les **tautologies** (par exemple  $p \vee \neg p$ ).
2. Les formules jamais vérifiées sont les **antilogies** (par exemple  $p \wedge \neg p$ ).

THÉORÈME 1 (COMPLÉTUDE FONCTIONNELLE) *Toute application  $F$  de  $V^n$  dans  $V$  est la fonction de vérité d'une formule  $\Phi$  à  $n$  variables.*

### 1.3 Connecteurs universels

On dispose de deux connecteurs universels (c'est à dire que chaque formule du calcul propositionnel est logiquement équivalente à une formule qui ne possède que l'un de ses connecteurs *et rien d'autre*) :

1. Le connecteur de Pierce (1880) :  $A \downarrow B \equiv \neg A \wedge \neg B$
2. Le connecteur de Scheffer (1921) :  $A | B \equiv \neg A \vee \neg B$ .

REMARQUE 1 Les systèmes de connecteurs :  $\{\neg, \vee\}$  et  $\{\neg, \wedge\}$  sont complets

### 1.4 Formes normales

#### DÉFINITION 4

Une **clause** est une disjonction finie de variables propositionnelles et de disjonction de variables prépositionnelles : par exemple :  $p \vee q \vee r$ . Elle peut être **négative** (les variables sont toutes niées) ou **positive**. La clause vide est notée  $\square$ .

#### DÉFINITION 5

1. Une **forme normale conjonctive** est une conjonction de clauses, par exemple  $(p \vee q \vee r) \wedge (s \vee t)$ .
2. Une **forme normale disjonctive** est une disjonction finie de conjonctions, par exemple  $(p \wedge q \wedge r) \vee (s \wedge t)$

THÉORÈME 2 *Toute formule est logiquement équivalente à une FND ou à une FNC.*

REMARQUE 2 Il faut connaître deux idées de preuve.

## 2 Un théorème important

THÉORÈME 3 (THÉORÈME DE COMPACITÉ) *Soit  $\mathcal{G}$  un ensemble de formules, contruites sur un ensemble dénombrable de variables propositionnelles  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  : si toute partie finie de  $\mathcal{G}$  est satisfiable, alors  $\mathcal{G}$  est satisfiable*

## 3 Notion de modèle

### 3.1 Définitions

#### DÉFINITION 6

1. Une valuation  $\sigma$  est un modèle d'un ensemble  $\Sigma$  de formules si  $\sigma$  vérifie tout élément de  $\Sigma$ .
2. Si tout modèle de  $\Sigma$  satisfait  $A$ , on note  $\Sigma \vdash A$  et on dit que "  $\Sigma$  mène à  $A$ " ou "  $A$  est conséquence de  $\Sigma$ ".
3.  $\Sigma$  est **consistant** ou **satisfiable** s'il a au moins un contremodèle et **in-consistant** sinon.

### 3.2 Quelques propositions

FAIT 1  $\Sigma \vdash A$  ssi  $\Sigma \cup \{\neg A\}$  est inconsistant.

FAIT 2 Si  $\Sigma$  est inconsistant, alors pour toute formule  $A$  :  $\Sigma \vdash A$ .

FAIT 3  $A$  tautologie équivaut à  $\emptyset \vdash A$ .

FAIT 4  $A$  antilogie équivaut à  $\{A\}$  inconsistant.

### 3.3 Schéma d'inférence

DÉFINITION 7

1. Un schéma d'inférence est une figure de la forme :

$$\frac{A_1, A_2, \dots, A_n}{B}$$

où les  $A_i$  sont les **prémices** et  $B$  la **conclusion**.

2. On dit que ce schéma est **valide** si la conclusion se déduit des prémisses, c'est à dire si  $A_1, \dots, A_n \vdash B$ .
3. On appelle **contremodèle** du schéma une valuation  $\sigma$  qui vérifie les prémices et falsifie la conclusion.

FAIT 5 Un schéma valide est un schéma qui n'a pas de contremodèle.

## 4 Méthode des séquents (Gentzen, 1936)

### 4.1 Introduction

#### 4.1.1 Définitions

DÉFINITION 8

Un séquent est une figure de la forme  $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_p$ , on le représente par  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  où  $\Gamma$  (**antécédent**) et  $\Delta$  (**conséquent**) sont des *ensembles* de formules.

DÉFINITION 9

$\sigma$  est un **modèle du séquent** si  $\sigma$  falsifie un élément de  $\Gamma$ , ou  $\sigma$  vérifie un élément de  $\Delta$ .

DÉFINITION 10

$\sigma$  est un **contremodèle du séquent** si  $\sigma$  vérifie les éléments de  $\Gamma$ , et  $\sigma$  falsifie les éléments de  $\Delta$ .

### 4.1.2 Premiers résultats

FAIT 6 " $\Rightarrow B$ " valide signifie que  $B$  est une tautologie (on ne peut trouver de valuation  $\sigma$  qui falsifie  $B$ ).

FAIT 7 " $A \Rightarrow$ " valide signifie que  $A$  est une antilogie.

FAIT 8 Les séquents  $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_p$  et  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_p$  ont les mêmes contremodèles. Ces deux séquents sont valides ssi la formule  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_p$  est une tautologie.

## 4.2 Méthode des séquents sans coupure

### 4.2.1 Introduction à la méthode

- **Les axiomes** de cette méthode sont les séquents  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  tels qu'il existe une formule commune à  $\Delta$  et à  $\Gamma$  (on dit que  $\Gamma$  coupe  $\Delta$ )
- **Les règles** : il y a une paire de règles par connecteur. Ce sont des règles dites **d'introduction**.

$$\vee : \frac{\Gamma, \mathbf{F} \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \mathbf{G} \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{F} \vee \mathbf{G} \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F}, \mathbf{G}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \vee \mathbf{G}}$$

$$\wedge : \frac{\Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{G} \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{F} \wedge \mathbf{G} \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{G}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \wedge \mathbf{G}}$$

$$\rightarrow : \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \quad \Gamma, \mathbf{G} \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G} \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma, \mathbf{F} \Rightarrow \Delta, \mathbf{G}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}}$$

$$\neg : \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F}}{\Gamma, \neg \mathbf{F} \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma, \mathbf{F} \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg \mathbf{F}}$$

- **Une preuve** est un arbre constitué d'une succession de séquents (chaînage avant).

### 4.2.2 Théorèmes

LEMME 1 Pour chacune des règles, la conclusion et les prémisses sont équivalents.

On obtient donc les théorèmes :

THÉORÈME 4 (ADÉQUATION) *Tout séquent prouvable est valide.*

THÉORÈME 5 (COMPLÉTUDE) *Tout séquent valide est prouvable.*

### 4.3 Méthode des séquents avec coupure

- On ajoute une règle dite **de coupure** qui est la suivante :

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \quad \Sigma, \mathbf{F} \Rightarrow \Theta}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Theta}$$

- On ne raisonne plus en termes d'ensemble mais en termes de *suites* de formules.
- On ajoute les règles :

$$\text{"affaiblissement"} : \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathbf{F}, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F}}$$

$$\text{"contraction"} : \frac{\mathbf{F}, \mathbf{F}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathbf{F}, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F}, \mathbf{F}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F}}$$

$$\text{"permutation"} : \frac{\Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{G}, \mathbf{F}, \Sigma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{G}, \mathbf{F}, \Sigma}$$

- **Axiome** :  $A \Rightarrow A$ .

REMARQUE 3 Le principal intérêt de ces séquents avec coupure est qu'ils diminuent la longueur de l'arbre de preuve. Par contre la démonstration n'est plus déterministe : elle fait appel à l'"imagination".

### 4.4 Extension : les séquents infinis

#### 4.4.1 Les séquents infinis

- On dispose de  $\Gamma$  et  $\Delta$  des ensembles de formules (qui peuvent être infinis dénombrables). Ils sont ordonnés. La **tête** d'un ensemble de formule est son premier élément, la **queue** est le reste.
- L'arbre de preuve est obtenu en injectant à chaque fois un nouvel élément de  $\Gamma$  à gauche du signe séquent et un nouvel élément de  $\Delta$  (à droite) jusqu'à ce qu'une des feuilles soit un axiome.

REMARQUE 4 Les ensembles "ordonnés" de formules sont en fait des suites.

REMARQUE 5 Les arbres de preuve peuvent être infinis.

#### DÉFINITION 11

1. Une feuille est dite **fermée** si son étiquette est un axiome.
2. Un séquent infini est **prouvable** si on peut contruire un arbre fini de preuve, c'est-à-dire qu'il existe  $\Delta_0 \subset \Delta$  et  $\Sigma_0 \subset \Sigma$  ensembles finis, tels que  $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ .

THÉORÈME 6 (COMPLÉTUDE) *La méthode des séquents infinis est complète.*

#### 4.4.2 Les ensembles d'Hintikka (1955)

NOTATION Soit  $S : \Gamma \Rightarrow \Delta$ . Si  $X$  est une formule, on note  $X_g$  si  $X$  figure dans  $\Gamma$  et  $X_d$  si  $X$  figure dans  $\Delta$ .

#### DÉFINITION 12

Un ensemble  $\Sigma$  de séquents est dit **d'Hintikka** ssi

- si  $p$  est une variable propositionnelle, on ne peut avoir  $p_d$  et  $p_g$ .
- • si  $X_g$  avec  $X = \neg Y$ , alors  $Y_d$ 
  - si  $X_d$  avec  $X = \neg Y$ , alors  $Y_g$
- • si  $X_g$  avec  $X = Y \wedge Z$ , alors  $Y_g$  et  $Z_g$ 
  - si  $X_d$  avec  $X = Y \vee Z$ , alors  $Y_d$  et  $Z_d$
  - si  $X_d$  avec  $X = Y \rightarrow Z$ , alors  $Y_g$  et  $Z_d$
- • si  $X_d$  avec  $X = Y \wedge Z$ , alors  $Y_d$  ou  $Z_d$ 
  - si  $X_g$  avec  $X = Y \vee Z$ , alors  $Y_d$  ou  $Z_d$
  - si  $X_g$  avec  $X = Y \rightarrow Z$ , alors  $Y_g$  ou  $Z_d$

FAIT 9 *Les éléments d'un ensemble  $\Sigma$  d'Hintikka admettent un même contre-modèle.*

FAIT 10 *Si un arbre de preuve n'a pas toutes ses feuilles axiomes, on peut en extraire un ensemble d'Hintikka.*

Les ensembles d'Hintikka servent à prouver le théorème de complétude des séquents infinis :

THÉORÈME 7 (COMPLÉTUDE) *Etant donné un séquent  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  :*

1. *ou bien il est valide et l'arbre de preuve se termine avec toutes ses feuilles axiomes. Dans ce cas, il existe  $\Gamma_0, \Delta_0$  parties finies telles que  $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$  soit prouvable.*
2. *ou bien il n'est pas valide*
  - *s'il est infini, l'arbre ne se termine pas.*
  - *s'il est fini, l'arbre se termine avec au moins une feuille non axiome.*

*Dans les deux cas, on peut trouver un contre-modèle.*

Ils servent aussi à montrer le théorème de compacité :

THÉORÈME 8  *$\Gamma$  est satisfiable ssi toute partie finie de  $\Gamma$  l'est.*

## 5 La méthode de coupure (ou de résolution)

### 5.1 Introduction à la méthode

- Soit tout d'abord le lemme :

LEMME 2 (RÈGLE DE COUPURE) *Si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux clauses qui contiennent l'une le littéral  $u$  et l'autre sa négation  $\bar{u}$ , c'est à dire  $C_1 = C'_1 \vee u$  et  $C_2 = C'_2 \vee \bar{u}$ , alors  $C_1 \wedge C_2 \vdash C'_1 \vee C'_2$ .  $C'_1 \vee C'_2$  est appelée **une résolvente** de  $C_1$  et  $C_2$ . Si on convient de représenter une clause par l'ensemble des littéraux qui la composent, on obtient la règle :*

*Si  $C_1$  et  $C_2$  sont des clauses,  $u$  un littéral de  $C_1$ ,  $\bar{u} \in C_2$ , alors  $\frac{C_1, C_2}{C_1 \cup C_2 - \{u, \bar{u}\}}$*

- On appelle **preuve par coupure** à partir de  $\Sigma$  (ensemble de clauses) une suite de clauses  $C_0, \dots, C_n$  telle que tout élément de la suite soit dans  $\Sigma$ , ou soit résolvente de deux clauses antérieures dans la suite. Le dernier élément de la suite est le **but** de la preuve. Si c'est  $\square$ , la preuve est appelée **réfutation** de  $\Sigma$ .
- **L'arbre de preuve** associé est un arbre binaire de racine étiquetée par  $C$ , les feuilles sont étiquetées par les éléments de  $\Sigma$ , tout nœud interne a deux fils et est étiqueté par une résolvente des étiquettes de ses fils. On construit l'arbre des feuilles vers la racine.

### 5.2 Théorème important et perspectives

#### 5.2.1 Complétude de la méthode

THÉORÈME 9 (COMPLÉTUDE) *La méthode de coupure est complète, c'est-à-dire que si  $\Sigma$  est un ensemble de clauses inconsistent et fini, on peut trouver un arbre de réfutation de  $\Sigma$ .*

#### 5.2.2 Programmation logique

Cette méthode n'est pas déterministe. Pour l'implémenter, on se limite aux *clauses de Horn*

#### DÉFINITION 13

1. On appelle **clause de Horn** une clause qui contient au plus un littéral positif.
2. S'il y a un littéral positif dans une formule, on parle de clause **définie**, s'il n'y en a qu'un, on parle de **fait**.
3. Une clause négative est qualifiée de **but**.

#### DÉFINITION 14

1. Un arbre de preuve à résolution linéaire est un peigne où le squelette linéaire est les  $C_i$  et les feuilles  $B_i$  ajoutées des éléments de  $\Sigma \cup \{C_0, \dots, C_{i-1}\}$

2. Une preuve par résolution linéaire est à entrées directes si  $C_i$  est obtenu comme résultante de  $C_{i-1}$  et d'une clause prise dans  $\Sigma$  seulement.

**PROPOSITION 2** *En se limitant aux clauses de Horn, ce que fait PROLOG, une résolution linéaire à entrées directes est déterministe (et complète).*