Calcul Propositionnel

Laure Danthony

Contents

1 Logique propositionnelle

1.1 Lexique

On considère :

1. $p_0, p_1, \ldots$ ensemble infini dénombrable de **variables propositionnelles** (ou variables);
2. les connecteurs $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
3. les parenthèses

DÉFINITION 1
Les **formules** sont les arbres dyadiques (0, 1 ou 2 fils) tels que :

1. si un nœud a deux fils, il est étiqueté par $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ ou $\leftrightarrow$
2. s'il a un fils, il est étiqueté par $\neg$
3. si c'est une feuille, il est étiqueté par une variable.

1.2 Valeurs de vérité

On considère $V = \{0, 1\}$ ($0 =$ faux et $1 =$ vrai par convention). A chaque symbole logique, on associe une opération sur V décrite par une table de valeurs :

p	$\neg p$	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1

PROPOSITION 1 $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

DÉFINITION 2
1. On appelle **valuation** une fonction qui assigne une valeur 0 ou 1 à chaque variable et qui se prolonge aux formules.
2. On dit que σ **vérifie** la formule Φ si $\sigma(\Phi) = 1$, la **falsifie** sinon.

DÉFINITION 3
1. Les formules toujours vérifiées (pour toute distribution de vérité) sont les **tautologies** (par exemple $p \vee \neg p$).
2. Les formules jamais vérifiées sont les **antilogies** (par exemple $p \wedge \neg p$).

THÉORÈME 1 (COMPLÉTUDE FONCTIONNELLE) *Toute application F de V^n dans V est la fonction de vérité d'une formule Φ à n variables.*

1.3 Connecteurs universels

On dispose de deux connecteurs universels (c'est à dire que chaque formule du calcul propositionnel est logiquement équivalente à une formule qui ne possède que l'un de ses connecteurs *et rien d'autre*) :

1. Le connecteur de Pierce (1880) : $A \downarrow B \equiv \neg A \wedge \neg B$
2. Le connecteur de Scheffer (1921) : $A \mid B \equiv \neg A \vee \neg B$.

REMARQUE 1 Les systèmes de connnecteurs : $\{\neg, \vee\}$ et $\{\neg, \wedge\}$ sont complets

1.4 Formes normales

DÉFINITION 4
Une **clause** est une disjonction finie de variables propositionnelles et de disjonction de variables prépositionnelles : par exemple : $p \vee q \vee r$. Elle peut être **négative** (les variables sont toutes niées) ou **positive**. La clause vide est notée $\square$.

DÉFINITION 5
1. Une **forme normale conjonctive** est une conjonction de clauses, par exemple $(p \vee q \vee r) \wedge (s \vee t)$.
2. Une **forme normale disjonctive** est une disjonction finie de conjonctions, par exemple $(p \wedge q \wedge r) \vee (s \wedge t)$

THÉORÈME 2 *Toute formule est logiquement équivalente à une FND ou à une FNC.*

REMARQUE 2 Il faut connaître deux idées de preuve.

2 Un théorème important

THÉORÈME 3 (THÉORÈME DE COMPACITÉ) *Soit $\mathcal{G}$ un ensemble de formules, contruites sur un ensemble dénombrable de variables propositionnelles $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$:si toute partie finie de $\mathcal{G}$ est satisfiable, alors $\mathcal{G}$ est satisfiable*

3 Notion de modèle

3.1 Définitions

DÉFINITION 6
1. Une valuation σ est un modèle d'un ensemble Σ de formules si σ vérifie tout élément de Σ.
2. Si tout modèle de Σ satisfait A, on note $\Sigma \vdash A$ et on dit que "Σ mène à A" ou "A est conséquence de Σ".
3. Σ est **consistant** ou **satisfiable** s'il a au moins un contremodèle et **inconsistant** sinon.

3.2 Quelques propositions

FAIT 1 *$\Sigma \vdash A$ ssi $\Sigma \cup \{\neg A\}$ est inconsistant.*

FAIT 2 *Si Σ est inconsistant, alors pour toute formule $A : \Sigma \vdash A$.*

FAIT 3 *A tautologie équivaut à $\emptyset \vdash A$.*

FAIT 4 *A antilogie équivaut à $\{A\}$ inconsistant.*

3.3 Schéma d'inférence

DÉFINITION 7

1. Un schéma d'inférence est une figure de la forme :

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

où les A_i sont les **prémices** et B la **conclusion**.

2. On dit que ce schéma est **valide** si la conclusion se déduit des prémisses, c'est à dire si $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

3. On appelle **contremodèle** du schéma une valuation σ qui vérifie les prémices et falsifie la conclusion.

FAIT 5 *Un schéma valide est un schéma qui n'a pas de contremodèle.*

4 Méthode des séquents (Gentzen, 1936)

4.1 Introduction

4.1.1 Définitions

DÉFINITION 8

Un séquent est une figure de la forme $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_p$, on le représente par $\Gamma \Rightarrow \Delta$ où Γ (**antécédent**) et Δ (**conséquent**) sont des *ensembles* de formules.

DÉFINITION 9

σ est un **modèle du séquent** si σ falsifie un élément de Γ, **ou** σ vérifie un élément de Δ.

DÉFINITION 10

σ est un **contremodèle du séquent** si σ vérifie les éléments de Γ, **et** σ falsifie les éléments de Δ.

4.1.2 Premiers résultats

FAIT 6 *"$\Rightarrow B$" valide signifie que B est une tautologie (on ne peut trouver de valuation σ qui falsifie B).*

FAIT 7 *"$A \Rightarrow$" valide signifie que A est une antilogie.*

FAIT 8 *Les séquents $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots B_p$ et $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_p$ ont les mêmes contremodèles. Ces deux séquents sont valides ssi la formule $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \ldots B_p$ est une tautologie.*

4.2 Méthode des séquents sans coupure

4.2.1 Introduction à la méthode

- **Les axiomes** de cette méthode sont les séquents $\Gamma \Rightarrow \Delta$ tels qu'il existe une formule commune à Δ et à Γ (on dit que Γ coupe Δ)

- **Les règles** : il y a une paire de règles par connecteur. Ce sont des règles dites **d'introduction**.

$$\vee : \frac{\Gamma, \mathbf{F} \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \mathbf{G} \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{F} \vee \mathbf{G} \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F}, \mathbf{G}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \vee \mathbf{G}}$$

$$\wedge : \frac{\Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{G} \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{F} \wedge \mathbf{G} \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{G}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \wedge \mathbf{G}}$$

$$\rightarrow : \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \qquad \Gamma, \mathbf{G} \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G} \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma, \mathbf{F} \Rightarrow \Delta, \mathbf{G}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}}$$

$$\neg : \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F}}{\Gamma, \neg \mathbf{F} \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma, \mathbf{F} \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg \mathbf{F}}$$

- **Une preuve** est un arbre constitué d'une succession de séquents (chaînage avant).

4.2.2 Théorèmes

LEMME 1 *Pour chacune des règles, la conclusion et les prémisses sont équivalents.*

On obtient donc les théorèmes :

THÉORÈME 4 (ADÉQUATION) *Tout séquent prouvable est valide.*

THÉORÈME 5 (COMPLÉTUDE) *Tout séquent valide est prouvable.*

4.3 Méthode des séquents avec coupure

- On ajoute une règle dite **de coupure** qui est la suivante :

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \qquad \Sigma, \mathbf{F} \Rightarrow \Theta}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Theta}$$

- On ne raisonne plus en termes d'ensemble mais en termes de *suites* de formules.

- On ajoute les règles :

$$\text{"affaiblissement" : } \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathbf{F}, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F}}$$

$$\text{"contraction" : } \frac{\mathbf{F}, \mathbf{F}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathbf{F}, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F}, \mathbf{F}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F}}$$

$$\text{"permutation" : } \frac{\Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{G}, \mathbf{F}, \Sigma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{G}, \mathbf{F}, \Sigma}$$

- **Axiome** : $A \Rightarrow A$.

Remarque 3 Le principal intérêt de ces séquents avec coupure est qu'ils diminuent la longueur de l'arbre de preuve. Par contre la démonstration n'est plus déterministe : elle fait appel à l'"imagination".

4.4 Extension : les séquents infinis

4.4.1 Les séquents infinis

- On dispose de Γ et Δ des ensembles de formules (qui peuvent être infinis dénombrables). Ils sont ordonnés. La **tête** d'un ensemble de formule est son premier élément, la **queue** est le reste.

- L'arbre de preuve est obtenu en injectant à chaque fois un nouvel élement de Γ à gauche du signe séquent et un nouvel élement de Δ (à droite) jusqu'à ce qu'une des feuilles soit un axiome.

Remarque 4 Les ensembles "ordonnés " de formules sont en fait des suites.

Remarque 5 Les arbres de preuve peuvent être infinis.

Définition 11

1. Une feuille est dite **fermée** si son étiquette est un axiome.

2. Un séquent infini est **prouvable** si on peut contruire un arbre fini de preuve, c'est-à-dire qu'il existe $\Delta_0 \subset \Delta$ et $\Sigma_0 \subset \Sigma$ ensembles finis, tels que $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$.

Théorème 6 (Complétude) *La méthode des séquents infinis est complète.*

4.4.2 Les ensembles d'Hintikka (1955)

NOTATION Soit $S : \Gamma \Rightarrow \Delta$. Si X est une formule, on note X_g si X figure dans Γ et X_d si X figure dans Δ.

DÉFINITION 12
Un ensemble Σ de séquents est dit **d'Hintikka** ssi

- si p est une variable propositionnelle, on ne peut avoir p_d et p_g.
- - si X_g avec $X = \neg Y$, alors Y_d
  - si X_d avec $X = \neg Y$, alors Y_g
- - si X_g avec $X = Y \wedge Z$, alors Y_g et Z_g
  - si X_d avec $X = Y \vee Z$, alors Y_d et Z_d
  - si X_d avec $X = Y \to Z$, alors Y_g et Z_d
- - si X_d avec $X = Y \wedge Z$, alors Y_d ou Z_d
  - si X_g avec $X = Y \vee Z$, alors Y_d ou Z_d
  - si X_g avec $X = Y \to Z$, alors Y_g ou Z_d

FAIT 9 *Les éléments d'un ensemble Σ d'Hintikka admettent un même contremodèle.*

FAIT 10 *Si un arbre de preuve n'a pas toutes ses feuilles axiomes, on peut en extraire un ensemble d'Hintikka.*

Les ensembles d'Hintikka servent à prouver le théorème de complétude des séquents infinis :

THÉORÈME 7 (COMPLÉTUDE) *Etant donné un séquent $\Gamma \Rightarrow \Delta$:*

1. *ou bien il est valide et l'arbre de preuve se termine avec toutes ses feuilles axiomes. Dans ce cas, il existe Γ_0, Δ_0 parties finies telles que $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ soit prouvable.*
2. *ou bien il n'est pas valide*
   - *s'il est infini, l'arbre ne se termine pas.*
   - *s'il est fini, l'arbre se termine avec au moins une feuille non axiome.*

   Dans les deux cas, on peut trouver un contremodèle.

Ils servent aussi à montrer le théorème de compacité :

THÉORÈME 8 Γ *est satisfiable ssi toute partie finie de* Γ *l'est.*

5 La méthode de coupure (ou de résolution)

5.1 Introduction à la méthode

- Soit tout d'abord le lemme :

  LEMME 2 (RÈGLE DE COUPURE) *Si C_1 et C_2 sont deux clauses qui contiennent l'une le littéral u et l'autre sa négation $\overline{u}$, c'est à dire $C_1 = C_1' \vee u$ et $C_2 = C'2 \vee \overline{u}$, alors $C_1 \wedge C_2 \vdash C_1' \vee C_2'$.*
  $C_1' \vee C_2'$ est appelée **une résolvante** *de C_1 et C_2. Si on convient de représenter une clause par l'ensemble des littéraux qui la composent, on obtient la règle :*
  Si C_1 et C_2 sont des clauses, u un littéral de C_1, $\overline{u} \in C_2$, alors $\dfrac{C_1, C_2}{C_1 \cup C_2 - \{u, \overline{u}\}}$

- On appelle **preuve par coupure** à partir de Σ (ensemble de clauses) une suite de clauses $C_0, \ldots, C_n$ telle que tout élément de la suite soit dans Σ, ou soit résolvante de deux clauses antérieures dans la suite. Le dernier élément de la suite est le **but** de la preuve. Si c'est $\Box$, la preuve est appelée **réfutation** de Σ.

- **L'arbre de preuve** associé est un arbre binaire de racine étiquetée par C, les feuilles sont étiquetées par les éléments de Σ, tout nœud interne a deux fils et est étiqueté par une résolvante des étiquettes de ses fils. On construit l'arbre des feuilles vers la racine.

5.2 Théorème important et perspectives

5.2.1 Complétude de la méthode

THÉORÈME 9 (COMPLÉTUDE) *La méthode de coupure est complète, c'est-à-dire que si Σ est un ensemble de clauses inconsistant et fini, on peut trouver un arbre de réfutation de Σ.*

5.2.2 Programmation logique

Cette méthode n'est pas déterministe. Pour l'implémenter, on se limite aux *clauses de Horn*

DÉFINITION 13

1. On appelle **clause de Horn** une clause qui contient au plus un littéral positif.

2. S'il y a un littéral positif dans une formule, on parle de clause **définie**, s'il n'y en a qu'un, on parle de **fait**.

3. Une clause négative est qualifiée de **but**.

DÉFINITION 14

1. Un arbre de preuve à résolution linéaire est un peigne où le squelette linéaire est les C_i et les feuilles B_i ajoutées des éléments de $\Sigma \cup \{C_0, ..C_{i-1}\}$

2. Une preuve par résolution linéaire est à entrées directes si C_i est obtenu comme résultante de C_{i-1} et d'une clause prise dans Σ seulement.

PROPOSITION 2 *En se limitant aux clauses de Horn, ce que fait PROLOG, une résolution linéaire à entrées directes est déterministe (et complète).*