Méthode de Hilbert

Laure Danthony

1 Définitions

DÉFINITION 1
Une **preuve** est une suite finie de formules $F_1, \ldots, F_n$ telle que, quel que soit $i \in [\![1, n]\!]$, ou bien F_i est un axiome, ou bien il existe $1 \leq j \leq i$ et $1 \leq k \leq i$ tels que $F_k = F_j \rightarrow F_i$. (Modus Ponens)

DÉFINITION 2
Une **preuve à partir d'un ensemble de formules** Γ est une preuve où l'on se permet d'injecter des formules de Γ.

2 Axiomes de Hilbert

Ils sont au nombre de 9 :

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
3. $(A \rightarrow B) \rightarrow \big((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$
4. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
5. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
6. $(A \rightarrow B) \rightarrow \big((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B)\big)$
7. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
8. $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$
9. $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

3 Théorème

THÉORÈME 1 *Le système de Hilbert est complet*

4 Exercices

1. Montrons que $A \to A$ est une tautologie :
   Avec (1), on a : $A \to (A \to A)$.
   Puis, avec (2) : $\big((A \to (A \to A)\big) \to (A \to A)$.
   Enfin, avec le Modus Ponens : $A \to A$

2. Montrons que $A \vee \neg A$ est une tautologie :
   Avec (8) : $(A \vee \neg A) \leftrightarrow (\neg A \to \neg A$.
   Avec (5) : $\big((A \vee \neg A) \leftrightarrow (\neg A \to \neg A\big) \to \big((\neg A \to \neg A)\big)$.
   Donc : $(\neg A \to \neg A) \to (A \vee \neg A)$
   Donc $A \vee \neg A$.