

Magistère d'Informatique et Modélisation

Logique : *Théorème de Compacité*

© J.-P. BARANI 98/99

Laure Danthony

On va montrer ici le résultat suivant :

Soit \mathcal{G} un ensemble de formules, contruites sur un ensemble dénombrable de variables propositionnelles $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$: si toute partie finie de \mathcal{G} est satisfiable, alors \mathcal{G} est satisfiable.

Les idées de la preuve sont les suivantes :

- On va décrire \mathcal{G} comme une réunion *dénombrable* de parties *finies* \mathcal{G}_n .
- On utilisera ensuite l'hypothèse de l'énoncé pour construire par récurrence sur les variables p_i une distribution de vérité ν qui satisfait \mathcal{G} .

Commençons par définir, pour $n \in \mathbb{N}$, la partie \mathcal{G}_n de \mathcal{G} comme l'ensemble des formules de \mathcal{G} ne faisant intervenir que des variables propositionnelles p_i avec $i \leq n$, et de hauteur inférieure ou égale à n . Il est alors clair que \mathcal{G} est la réunion croissante des \mathcal{G}_n , pour n décrivant \mathbb{N} . Par ailleurs, chaque \mathcal{G}_n est fini : structurellement, le nombre d'arbres binaires de hauteur inférieure ou égale à n est fini, et aux feuilles de ceux-ci on a un choix fini parmi les variables propositionnelles. Notons ici que si l'on s'était contenté uniquement de la condition sur les hauteurs, les \mathcal{G}_n auraient pu être infinis : par exemple, les $p_1 \vee p_k$ fournissent une infinité de formules de hauteur 1.

Et maintenant, la preuve !

Chaque \mathcal{G}_k est une partie finie de \mathcal{G} donc est satisfiable. Notons ν_k une distribution de vérité satisfaisant \mathcal{G}_k . A l'aide de ces $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on va construire (par récurrence) ν une distribution de vérité sur les variables $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$, qui satisfait \mathcal{G} .

- Vu que \mathbb{N} est infini et pas $\{V, F\}$ (!), soit V , soit F est pris une infinité de fois par les $\nu_n(p_1)$. On note v_1 (valeur numéro 1) cette valeur prise une infinité de fois. On note aussi I_1 l'ensemble des indices pour lesquelles cette valeur est prise, i.e. : $I_1 = \{n | \nu_n(p_1) = v_1\}$; I_1 est infini.
- Attribuons maintenant une valeur à la variable p_2 . Pour cela, considérons toujours les ν_n précédents, mais maintenant pour n appartenant à I_1 . En raisonnant de même que précédemment, on récupère l'existence de v_2 ($v_2 = V$ ou F) et d'un ensemble d'indices I_2 ($I_2 \subset I_1$) tels que I_2 soit infini et que $\forall n \in I_2, \nu_n(p_2) = v_2$.
- Par récurrence, on construit des ensembles emboîtés infinis d'indices I_k et des valeurs $v_k \in \{V, F\}$ vérifiant : $\forall n \in I_k, \nu_n(p_k) = v_k$. Grâce au caractère emboîté des I_k , on déduit facilement :

$$\forall n \in I_k, \forall i \in [1, k], \quad \nu_n(p_i) = v_i.$$

- A ce stade, on a construit une distribution de vérité ν sur les variables p_i (on a associé une valeur V ou F à chaque p_i). Notons que, par construction, ν coïncide, sur les variables p_1, \dots, p_{1515} avec tous les ν_i pour $i \in I_{1515}$, mais aussi, pour $i \in I_{1516} \dots$. Il reste à montrer que ν satisfait \mathcal{G} .
- Prenons donc φ dans \mathcal{G} . φ est dans un certain \mathcal{G}_N . Les variables intervenant dans φ sont d'indices inférieures ou égales à N donc $f_\nu(\varphi) = f_{\nu_i}(\varphi)$ pour tout $i \in I_N$. Considérons maintenant i_0 un élément de I_N supérieur à N (c'est possible, car I_N est infini). Alors :
 - d'une part, $f_\nu(\varphi) = f_{\nu_{i_0}}(\varphi)$;
 - d'autre part $\varphi \in \mathcal{G}_N \subset \mathcal{G}_{i_0}$, donc $f_{\nu_{i_0}}(\varphi) = V$.

Ainsi, $f_\nu(\varphi) = V$.

ν satisfait donc toutes les formules de \mathcal{G} , qui est donc satisfiable.