Magistère d'Informatique et Modélisation

Logique : *Théorème de Compacité*

© J.-P. BARANI 98/99

Laure Danthony

On va montrer ici le résultat suivant :

Soit $\mathcal{G}$ un ensemble de formules, contruites sur un ensemble dénombrable de variables propositionnelles $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$: si toute partie finie de $\mathcal{G}$ est satisfiable, alors $\mathcal{G}$ est satisfiable.

Les idées de la preuve sont les suivantes :

- On va décrire $\mathcal{G}$ comme une réunion *dénombrable* de parties *finies* $\mathcal{G}_n$.
- On utilisera ensuite l'hypothèse de l'énoncé pour construire par récurrence sur les variables p_i une distribution de vérité ν qui satisfait $\mathcal{G}$.

Commençons par définir, pour $n \in \mathbb{N}$, la partie $\mathcal{G}_n$ de $\mathcal{G}$ comme l'ensemble des formules de $\mathcal{G}$ ne faisant intervenir que des variables propositionnelles p_i avec $i \leq n$, et de hauteur inférieure ou égale à n. Il est alors clair que $\mathcal{G}$ est la réunion croissante des $\mathcal{G}_n$, pour n décrivant $\mathbb{N}$. Par ailleurs, chaque $\mathcal{G}_n$ est fini : structurellement, le nombre d'arbres binaires de hauteur inférieure ou égale à n est fini, et aux feuilles de ceux-ci on a un choix fini parmi les variables propositionnelles. Notons ici que si l'on s'était contenté uniquement de la condition sur les hauteurs, les $\mathcal{G}_n$ auraient pu être infinis : par exemple, les $p_1 \vee p_k$ fournissent une infinité de formules de hauteur 1.

Et maintenant, la preuve !

Chaque $\mathcal{G}_k$ est une partie finie de $\mathcal{G}$ donc est satisfiable. Notons ν_k une distribution de vérité satisfiant $\mathcal{G}_k$. A l'aide de ces $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on va contruire (par récurrence) ν une distribution de vérité sur les variables $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, qui satisfait $\mathcal{G}$.

- Vu que $\mathbb{N}$ est infini et pas $\{V, F\}$ (!), soit V, soit F est pris une infinité de fois par les $\nu_n(p_1)$. On note v_1 (valeur numéro 1) cette valeur prise une infinité de fois. On note aussi I_1 l'ensemble des indices pour lesquelles cette valeur est prise, i.e. : $I_1 = \{n|\nu_n(p_1) = v_1\}$; I_1 est infini.
- Attribuons maintenant une valeur à la variable p_2. Pour cela, considérons toujours les ν_n précédents, mais maintenant pour n appartenant à I_1. En raisonnant de même que précédemment, on récupère l'existence de v_2 ($v_2 = V$ ou F) et d'un ensemble d'indices I_2 ($I_2 \subset I_1$) tels que I_2 soit infini et que $\forall n \in I_2, \nu_n(p_2) = v_2$.
- Par récurrence, on construit des ensembles emboîtés infinis d'indices I_k et des valeurs $v_k \in \{V, F\}$ vérifiant : $\forall n \in I_k, \nu_n(p_k) = v_k$. Grâce au caractère emboîté des I_k, on déduit facilement :

$$\forall n \in I_k, \forall i \in [\![1, k]\!], \qquad \nu_n(p_i) = v_i.$$

- A ce stade, on a construit une distribution de vérité ν sur les variables p_i (on a associé une valeur V ou F à chaque p_i). Notons que, par construction, ν coïncide, sur les variables $p_1, \ldots, p_{1515}$ avec tous les ν_i pour $i \in I_{1515}$, mais aussi, pour $i \in I_{1516} \ldots$ Il reste à montrer que ν satisfait $\mathcal{G}$.

- Prenons donc φ dans $\mathcal{G}$. φ est dans un certain $\mathcal{G}_N$. Les variables intervenant dans φ sont d'indices inférieures ou égales à N donc $f_\nu(\varphi) = f_{\nu_i}(\varphi)$ pour tout $i \in I_N$. Considérons maintenant i_0 un élément de I_N supérieur à N (c'est possible, car I_N est infini). Alors :

  - d'une part, $f_\nu(\varphi) = f_{\nu_{i_0}}(\varphi)$;
  - d'autre part $\varphi \in \mathcal{G}_N \subset \mathcal{G}_{i_0}$, donc $f_{\nu_{i_0}}(\varphi) = V$.

  Ainsi, $f_\nu(\varphi) = V$.

  ν satisfait donc toutes les formules de $\mathcal{G}$, qui est donc satisfiable.