Confluence du lambda-calcul

1 Définitions préliminaires

1.1 Propriété du losange

C'est une propriété vérifiée par une relation R.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & M \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\ N_1 & & N_2 \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \exists P \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] N_1 \arrow[dr, "R"'] & & N_2 \arrow[dl, "R"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

1.2 Confluence

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & M \arrow[dl, two heads, "R"'] \arrow[dr, two heads, "R"] & \\ N_1 & & N_2 \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \exists P \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] N_1 \arrow[dr, two heads, "R"'] & & N_2 \arrow[dl, two heads, "R"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

1.3 Remarques

1. $\xrightarrow[R]{}$ est confluente si $\underset{R}{\twoheadrightarrow}$ a la propriété du losange.
2. Parfois on note la confluence :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \cdot \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\ \cdot \arrow[dr, two heads, dotted] & & \cdot \arrow[dl, two heads, dotted] \\ & \cdot & \end{tikzcd}$$

où $\overset{}{\cdots\!\twoheadrightarrow}$ est une flèche existentielle.

2 Confluence et convertibilité

2.1 Théorème de Church-Rosser

Théorème (Church-Rosser) :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } R \text{ est confluente alors} \\ M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N \Longleftrightarrow \exists P (M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P).\end{array}}$$

Démonstration

– $\Longleftarrow$ est évident
car $\underset{R}{\twoheadrightarrow} \subseteq \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}$ et $\underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}$ est symétrique et transitive.

- $\Longrightarrow$. Par induction sur le nombre de «pics» dans $M \xleftarrow[R]{} \xrightarrow[R]{} N$. Soit

$$M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_i \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots$$

$$\ldots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$

- si $n = 0$ alors $M \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$ ou $M \underset{R}{\twoheadrightarrow} N$.
- si $n \neq 0$, par confluence, dans $M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$ il existe M'_n tel que $N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} M'_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$

  et

  $$M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_i \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots$$

  $$\ldots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} M'_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$

  a un pic de moins, donc on a le résultat par induction.

2.2 Confluence et convertibilité

Corollaire : Si R est confluente :

1. Si N est une forme normale de M alors $M \underset{R}{\twoheadrightarrow} N$.
2. Un terme a au plus une forme normale.

3 Confluence de $\rightarrow_\beta$

Théorème :

$\boxed{\underset{\beta}{\longrightarrow} \text{ est confluent}}$

3.1 Remarques préliminaires

- Si $\underset{R}{\longrightarrow}$ a la propriété du losange, alors $\underset{R}{\twoheadrightarrow}$ a la propriété du losange.
- $\underset{\beta}{\longrightarrow}$ n'a pas la propriété du losange. Pourquoi ?
- Il faut donc trouver une relation $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\mid\mid\;\;$ telle que
  - o $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\mid\mid\;\;$ a la propriété du losange,
  - o $\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\mid\mid\;\; = \underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$,
    - + donc $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ a la propriété du losange,
    - + ce qui signifie que $\underset{\beta}{\longrightarrow}$ est confluente.

3.2 Lemme de substitution

Si $x \notin FV(L)$ alors
$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$

Démonstration : Par induction sur la structure de M.

- si M est une variable
  - $M \equiv x$, les deux côtés valent $N[y := L]$,

- $M \equiv y$, les deux côtés valent L,
- $M \equiv z$, les deux côtés valent z,

– si M est une abstraction $M \equiv \lambda z.M_1$.

$$\begin{array}{rcll} M[x := N][y := L] & \equiv & (\lambda z.M_1)[x := N][y := L] & \\ & \equiv & \lambda z.(M_1[x := N][y := L]) & \text{(par définition)} \\ & \equiv & \lambda z.(M_1[y := L][x := N[y := L]]) & \text{(par induction)} \\ & \equiv & (\lambda z.M_1)[y := L][x := N[y := L]] & \text{(par définition)} \end{array}$$

– si M est une application , c'est facile.

3.3 Définition de la réduction parallèle

$$\text{(réflexivité)} \quad M \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\;\shortmid\!\shortmid\; M$$

$$\text{(APP-congruence)} \quad \frac{M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\; M' \qquad N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\; N'}{M N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\; M' N'}$$

$$\text{(ABS-congruence)} \quad \frac{M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\; M'}{\lambda x.M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\; \lambda x.M'}$$

$$(\beta\text{-parallèle}) \quad \frac{M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\; M' \qquad N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\; N'}{(\lambda x.M)N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\; M'[x := N']}$$

3.4 Trois résultats

1. Si $M \xrightarrow[\beta]{} M'$ alors $M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\; M'$

   c'est-à-dire $\xrightarrow[\beta]{} \subseteq \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid$

2. Si $M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\; M'$ alors $M \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\rightarrow M'$

   c'est-à-dire $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid \subseteq \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\rightarrow$

3. Si $M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\; M'$ et $N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\; N'$ alors $M[x := N] \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\; M'[x := N']$

3.5 Une propriété plus forte

On prouve une propriété plus forte
que la propriété du losange pour $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid$:

$$M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\; N \Longrightarrow N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\; M^*$$

où M^* est un terme déterminé par M mais indépendant de N.

Intuitivement M^* est le terme obtenu à partir de M en contractant tous ses redex simultanément.

4 M^*

4.1 La définition de M^*

1. $x^* \equiv x$
2. $(\lambda x.M)^* \equiv \lambda x.M^*$
3. $(M_1 M_2)^* \equiv M_1^* M_2^*$ si $M_1 M_2$ n'est pas un redex.
4. $((\lambda x.M_1)M_2)^* \equiv M_1^*[x := M_2^*]$

4.2 Un résultat sur M^*

$$\boxed{M \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;} N \Longrightarrow N \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;} M^*.}$$

Les cas correspondant aux parties 1., 2. et 3. de la définition M^* sont laissés en exercice. On montre ici le cas 4.

Démonstration

Si $M \equiv ((\lambda x.M_1)M_2) \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;} N$, alors deux cas pour N,

- $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$
- $N \equiv N_1[x := N_2]$

Dans les deux cas, il y a des N_i (i=1 ou i=2) tels que $M_i \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;} N_i$. Par induction, $N_i \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;} M_i^*$. Pour chaque cas :

- Si $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$ alors $N \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;} M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$.
- Si $N \equiv N_1[x := N_2]$,alors nous avons $N \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;} M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$, par le résultat 3.