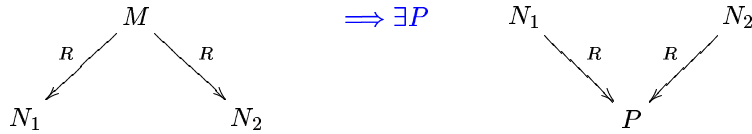


Confluence du lambda-calcul

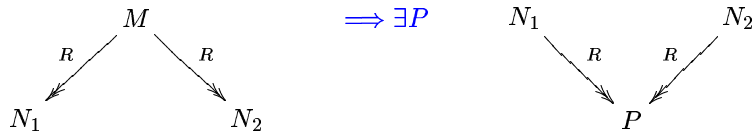
1 Définitions préliminaires

1.1 Propriété du losange

C'est une propriété vérifiée par une relation R .

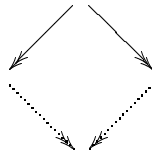


1.2 Confluence



1.3 Remarques

1. \xrightarrow{R} est confluente si \xrightarrow{R} a la propriété du losange.
2. Parfois on note la confluence :



où \dashrightarrow est une flèche existentielle.

2 Confluence et convertibilité

2.1 Théorème de Church-Rosser

Théorème (Church-Rosser) :

<p>Si R est confluente alors</p> $M \xleftrightarrow{R} N \iff \exists P (M \xrightarrow{R} P \wedge N \xrightarrow{R} P).$

Démonstration

- \iff est évident
- car $\xrightarrow{R} \subseteq \xleftrightarrow{R}$ et \xleftrightarrow{R} est symétrique et transitive.

- \implies . Par induction sur le nombre de «pics» dans $M \xleftrightarrow[R]{+} N$. Soit

$$M \xleftrightarrow[R]{+} M_1 \xleftrightarrow[R]{+} N_1 \dots \xleftrightarrow[R]{+} M_i \xleftrightarrow[R]{+} N_1 \dots \xrightarrow{\dots} N_{n-1} \xleftrightarrow[R]{+} M_n \xleftrightarrow[R]{+} N_n \xleftrightarrow[R]{+} N$$

- si $n = 0$ alors $M \xleftrightarrow[R]{+} N$ ou $M \xrightarrow{+} N$.

- si $n \neq 0$, par confluence, dans $M \xleftrightarrow[R]{+} M_1 \xleftrightarrow[R]{+} N_1 \dots N_{n-1} \xleftrightarrow[R]{+} M_n \xleftrightarrow[R]{+} N_n \xleftrightarrow[R]{+} N$ il existe

$$M'_n \text{ tel que } N_{n-1} \xleftrightarrow[R]{+} M'_n \xleftrightarrow[R]{+} N_n \xleftrightarrow[R]{+} N$$

et

$$M \xleftrightarrow[R]{+} M_1 \xleftrightarrow[R]{+} N_1 \dots \xleftrightarrow[R]{+} M_i \xleftrightarrow[R]{+} N_1 \dots \xrightarrow{\dots} N_{n-1} \xleftrightarrow[R]{+} M'_n \xleftrightarrow[R]{+} N_n \xleftrightarrow[R]{+} N$$

a un pic de moins, donc on a le résultat par induction.

2.2 Confluence et convertibilité

Corollaire : Si R est confluent :

1. Si N est une forme normale de M alors $M \xrightarrow{+}_R N$.
2. Un terme a au plus une forme normale.

3 Confluence de \rightarrow_β

Théorème :

$\xrightarrow{\beta}$ est confluent

3.1 Remarques préliminaires

- Si $\xrightarrow{+}_R$ a la propriété du losange, alors $\xrightarrow{+}_R$ a la propriété du losange.
- $\xrightarrow{\beta}$ n'a pas la propriété du losange. Pourquoi?
- Il faut donc trouver une relation $\dashv\vdash$ telle que
 - o $\dashv\vdash$ a la propriété du losange,
 - o $\dashv\vdash = \xrightarrow{\beta}$,
 - + donc $\xrightarrow{\beta}$ a la propriété du losange,
 - + ce qui signifie que $\xrightarrow{\beta}$ est confluent.

3.2 Lemme de substitution

Si $x \notin FV(L)$ alors $M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$

Démonstration : Par induction sur la structure de M .

- si M est une variable
 - $M \equiv x$, les deux côtés valent $N[y := L]$,

- $M \equiv y$, les deux côtés valent L ,
- $M \equiv z$, les deux côtés valent z ,
- si M est une abstraction $M \equiv \lambda z.M_1$.

$$\begin{aligned}
M[x := N][y := L] &\equiv (\lambda z.M_1)[x := N][y := L] \\
&\equiv \lambda z.(M_1[x := N][y := L]) \quad (\text{par définition}) \\
&\equiv \lambda z.(M_1[y := L][x := N[y := L]]) \quad (\text{par induction}) \\
&\equiv (\lambda z.M_1)[y := L][x := N[y := L]] \quad (\text{par définition})
\end{aligned}$$

- si M est une application, c'est facile.

3.3 Définition de la réduction parallèle

$$\begin{aligned}
&(\text{réflexivité}) \quad M \dashrightarrow M \\
&(\text{APP-congruence}) \quad \frac{M \dashrightarrow M' \quad N \dashrightarrow N'}{MN \dashrightarrow M'N'} \\
&(\text{ABS-congruence}) \quad \frac{M \dashrightarrow M'}{\lambda x.M \dashrightarrow \lambda x.M'} \\
&(\beta\text{-parallèle}) \quad \frac{M \dashrightarrow M' \quad N \dashrightarrow N'}{(\lambda x.M)N \dashrightarrow M'[x := N']}
\end{aligned}$$

3.4 Trois résultats

1. Si $M \xrightarrow{\beta} M'$ alors $M \dashrightarrow M'$
c'est-à-dire $\xrightarrow{\beta} \subseteq \dashrightarrow$
2. Si $M \dashrightarrow M'$ alors $M \xrightarrow{\beta} M'$
c'est-à-dire $\dashrightarrow \subseteq \xrightarrow{\beta}$
3. Si $M \dashrightarrow M'$ et $N \dashrightarrow N'$ alors $M[x := N] \dashrightarrow M'[x := N']$

3.5 Une propriété plus forte

On prouve une propriété **plus forte**
que la **propriété du losange** pour \dashrightarrow :

$$M \dashrightarrow N \implies N \dashrightarrow M^*$$

où M^* est un terme déterminé par M mais **indépendant** de N .

Intuitivement M^* est le terme obtenu à partir de M en contractant tous ses redex simultanément.

4 M^*

4.1 La définition de M^*

1. $x^* \equiv x$
2. $(\lambda x.M)^* \equiv \lambda x.M^*$
3. $(M_1M_2)^* \equiv M_1^*M_2^*$ si M_1M_2 n'est pas un redex.
4. $((\lambda x.M_1)M_2)^* \equiv M_1^*[x := M_2^*]$

4.2 Un résultat sur M^*

$$M \dashrightarrow N \Rightarrow N \dashrightarrow M^*.$$

Les cas correspondant aux parties 1., 2. et 3. de la définition M^* sont laissés en exercice. On montre ici le cas 4.

Démonstration

Si $M \equiv ((\lambda x.M_1)M_2) \dashrightarrow N$, alors deux cas pour N ,

- $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$
- $N \equiv N_1[x := N_2]$

Dans les deux cas, il y a des N_i ($i=1$ ou $i=2$) tels que $M_i \dashrightarrow N_i$. Par induction, $N_i \dashrightarrow M_i^*$. Pour chaque cas :

- Si $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$ alors $N \dashrightarrow M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$.
- Si $N \equiv N_1[x := N_2]$, alors nous avons $N \dashrightarrow M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$, par le résultat 3.