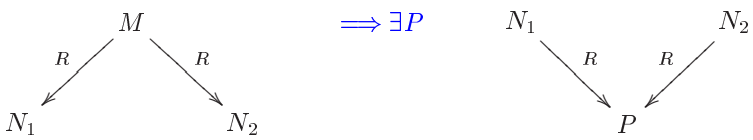
Confluence du lambda-calcul

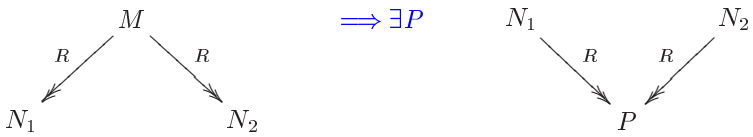
1 Définitions préliminaires

1.1 Propriété du losange

C'est une propriété vérifiée par une relation R.

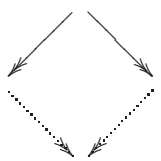


1.2 Confluence



1.3 Remarques

1. $\xrightarrow[R]{}$ est confluente si $\xrightarrow[R]{}$ a la propriété du losange.
2. Parfois on note la confluence :



où $\cdots\!\!\rightarrow$ est une flèche existentielle.

2 Confluence et convertibilité

2.1 Théorème de Church-Rosser

Théorème (Church-Rosser) :

Si R est confluente alors
$M \xleftrightarrow[R]{} N \iff \exists P (M \xrightarrow[R]{} P \wedge N \xrightarrow[R]{} P)$.

Démonstration

– $\Longleftarrow$ est évident
car $\xrightarrow[R]{} \subseteq \xleftrightarrow[R]{}$ et $\xleftrightarrow[R]{}$ est symétrique et transitive.

– $\Longrightarrow$. Par induction sur le nombre de «pics» dans $M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N$. Soit

$$M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_i \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots \ldots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$

– si $n = 0$ alors $M \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$ ou $M \underset{R}{\twoheadrightarrow} N$.

– si $n \neq 0$, par confluence, dans $M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$ il existe M'_n tel que $N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} M'_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$

et

$$M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_i \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots \ldots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} M'_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$

a un pic de moins, donc on a le résultat par induction.

2.2 Confluence et convertibilité

Corollaire : Si R est confluente :

1. Si N est une forme normale de M alors $M \underset{R}{\twoheadrightarrow} N$.
2. Un terme a au plus une forme normale.

3 Confluence de $\rightarrow_\beta$

Théorème :

$\underset{\beta}{\longrightarrow}$ est confluent

3.1 Remarques préliminaires

– Si $\underset{R}{\longrightarrow}$ a la propriété du losange, alors $\underset{R}{\twoheadrightarrow}$ a la propriété du losange.

– $\underset{\beta}{\longrightarrow}$ n'a pas la propriété du losange. Pourquoi ?

– Il faut donc trouver une relation $\dashrightarrow$ telle que

  o $\dashrightarrow$ a la propriété du losange,

  o $\dashrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow = \underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$,

  + donc $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ a la propriété du losange,

  + ce qui signifie que $\underset{\beta}{\longrightarrow}$ est confluente.

3.2 Lemme de substitution

Si $x \notin FV(L)$ alors
$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$

Démonstration : Par induction sur la structure de M.

– si M est une variable

  – $M \equiv x$, les deux côtés valent $N[y := L]$,

- $M \equiv y$, les deux côtés valent L,
- $M \equiv z$, les deux côtés valent z,

– si M est une abstraction $M \equiv \lambda z.M_1$.

$$\begin{aligned} M[x := N][y := L] &\equiv (\lambda z.M_1)[x := N][y := L] \\ &\equiv \lambda z.(M_1[x := N][y := L]) \quad \text{(par définition)} \\ &\equiv \lambda z.(M_1[y := L][x := N[y := L]]) \quad \text{(par induction)} \\ &\equiv (\lambda z.M_1)[y := L][x := N[y := L]] \quad \text{(par définition)} \end{aligned}$$

– si M est une application , c'est facile.

3.3 Définition de la réduction parallèle

$$\text{(réflexivité)} \quad M \twoheadrightarrow M$$

$$\text{(APP-congruence)} \quad \frac{M \twoheadrightarrow M' \qquad N \twoheadrightarrow N'}{MN \twoheadrightarrow M'N'}$$

$$\text{(ABS-congruence)} \quad \frac{M \twoheadrightarrow M'}{\lambda x.M \twoheadrightarrow \lambda x.M'}$$

$$(\beta\text{-parallèle}) \quad \frac{M \twoheadrightarrow M' \qquad N \twoheadrightarrow N'}{(\lambda x.M)N \twoheadrightarrow M'[x := N']}$$

3.4 Trois résultats

1. Si $M \xrightarrow[\beta]{} M'$ alors $M \twoheadrightarrow M'$

   c'est-à-dire $\xrightarrow[\beta]{} \subseteq \twoheadrightarrow$
2. Si $M \twoheadrightarrow M'$ alors $M \xrightarrow[\beta]{}\!\!> M'$

   c'est-à-dire $\twoheadrightarrow \subseteq \xrightarrow[\beta]{}\!\!>$
3. Si $M \twoheadrightarrow M'$ et $N \twoheadrightarrow N'$ alors $M[x := N] \twoheadrightarrow M'[x := N']$

3.5 Une propriété plus forte

On prouve une propriété plus forte
que la propriété du losange pour $\twoheadrightarrow$:

$$M \twoheadrightarrow N \Longrightarrow N \twoheadrightarrow M^*$$

où M^* est un terme déterminé par M mais indépendant de N.

Intuitivement M^* est le terme obtenu à partir de M en contractant tous ses redex simultanément.

4 M^*

4.1 La définition de M^*

1. $x^* \equiv x$
2. $(\lambda x.M)^* \equiv \lambda x.M^*$
3. $(M_1M_2)^* \equiv M_1^*M_2^*$ si M_1M_2 n'est pas un redex.
4. $((\lambda x.M_1)M_2)^* \equiv M_1^*[x := M_2^*]$

4.2 Un résultat sur M^*

$$\boxed{M \twoheadrightarrow N \Longrightarrow N \twoheadrightarrow M^*.}$$

Les cas correspondant aux parties 1., 2. et 3. de la définition M^* sont laissés en exercice. On montre ici le cas 4.

Démonstration
Si $M \equiv ((\lambda x.M_1)M_2) \twoheadrightarrow N$, alors deux cas pour N,

- $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$
- $N \equiv N_1[x := N_2]$

Dans les deux cas, il y a des N_i (i=1 ou i=2) tels que $M_i \twoheadrightarrow N_i$. Par induction, $N_i \twoheadrightarrow M_i^*$. Pour chaque cas :

- Si $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$ alors $N \twoheadrightarrow M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$.
- Si $N \equiv N_1[x := N_2]$,alors nous avons $N \twoheadrightarrow M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$, par le résultat 3.