Introduction à la Logique

1 Quels sont les buts de la logique ?

1.1 Pour tous

- Comprendre la nature intime du raisonnement mathématique [1]
- Faire du “raisonnement” une théorie mathématique comme les autres.
- Donner un sens précis à ce que peut-être le vrai
  dès qu’il s’agit de raisonnement et d’argumentation.

1.2 Pour les mathématiciens

- S’assurer (se convaincre ?) que les mathématiques sont exemptes de contradictions et de paradoxes.
- Apprendre une branche des mathématiques.

1.3 Pour les informaticiens

- Mécaniser les processus de raisonnement.
- Exhiber les liens entre *démonstrations* et *calculs*.
- Formaliser les objets informatiques.

2 Ce que la logique n’est pas : Point de vue personnel

- Le fondement ultime auquel se réduisent les mathématiques, (point de vue réductionniste)
- La discipline qui va faire remplacer les humains (en général) et les mathématiciens (en particulier) par des machines (point de vue mécaniste).

[1] et du raisonnement non mathématique !

3 La logique, une théorie mathématique

La logique est une théorie mathématique comme les autres !

- elle utilise les mathématiques comme le font les autres branches des mathématiques,
- elle étudie des sortes particuliers d'objets mathématiques : les propositions, les théorèmes, les jugements, les démonstrations, etc.

4 Un peu d'histoire

L'histoire montre que tout ce qui est susceptible de se mathématiser se mathématise.

Au début, seuls les entiers sont des êtres mathématiques.

Puis les Anciens acceptent les rationnels et les relatifs.

A la Renaissance, les complexes (ou imaginaires) deviennent eux-aussi des êtres mathématiques.

Au dix-neuf-ième siècle

- les réels (Dedekind),
- puis les fonctions (en “extension”)
- et les ensembles (Cantor) deviennent des êtres mathématiques.

Au début vingtième siècle, les fonctions (en “intention”) (Church et Curry) et les théorèmes (Boole, Frege etc.) deviennent des êtres mathématiques.

Aujourd'hui (1980), les démonstrations (Curry et Howard) deviennent des êtres mathématiques.

5 Mécaniser la logique ?

Deux positions s'affrontent.

Le mathématicien ne sera jamais battu par une machine

Alain Connes (le triangle de la pensée)

Il existe un théorème qui ne peut être prouvé que par un ordinateur

Veroff and McCune

Les algèbres de Boole peuvent être axiomatisées par le seul axiome

$$((x \mid z) \mid y) \mid ((x \mid (x \mid y)) \mid x) = y$$

où $\mid$ est le symbole de Sheffer qui peut être interprété comme

$$x \mid y \quad = \quad \bar{x} \,\&\, \bar{y}.$$

6 Les deux niveaux de la logique

En logique, il y a deux niveaux qui interfèrent et qu'il ne faut pas confondre.

- La théorie, (on dit aussi parfois la théorie objet, si l'on veut être plus précis).
- La méta-théorie, c'est une mathématique dans laquelle on va raisonner sur l'objet. C'est aussi un système logique !

La théorie objet est l'objet logique que l'on étudie et que l'on souhaite donc formaliser.

En général, on accepte dans la méta-théorie toute la puissance du raisonnement traditionnel. Si elle est mécanisée, cela peut-être par un système formel plus ou moins puissant.

Dans la méta-théorie, on prouve des méta-théorèmes, c-à-d des théorèmes à propos de la théorie objet.

Quelques méta-théorèmes courants sont :

- la correction,
- la cohérence,
- la complétude.

7 Les ingrédients de la logique

7.1 Les aspects preuves

En logique on trouve :

- un langage d'expressions bien formées : les propositions (construites avec des *connecteurs*), les jugements, etc.
  On dit aussi que c'est la *syntaxe*.
- des axiomes,
- des règles.

Les axiomes affirment que certaines propositions sont des théorèmes : on définit un prédicat unaire dans la méta-théorie.

Les règles montrent comment construire des théorèmes à partir d'autres théorèmes. On définit dans la méta-théorie,

- des fonctions des propositions vers les propositions (règles monadiques)
- ou des fonctions des couples de propositions vers les propositions (règles dyadiques)

Le but des axiomes et des règles est de former des expressions particulières, les théorèmes en construisant des objets mathématiques particuliers les démonstrations (ou preuves).

Il y a différentes sortes d'objets : propositions[2], théorèmes, etc.

[2] qui ne sont pas théorèmes

Dans une logique, l'appartenance d'un objet à telle ou telle sorte se décrète par un jugement.

7.2 Syntaxe concrète et syntaxe abstraite

Un ordinateur a besoin qu'on lui parle de la syntaxe à un bas niveau, c'est la syntaxe concrète, c-à-d les virgules, les parenthèses, les retours à la ligne, etc.

Un humain préfère une syntaxe lisible et flexible, il a besoin de la syntaxe abstraite, c-à-d plutôt la structure arborescente, donc il souhaite des opérateurs infixes, l'associativité.

7.3 Les aspects modèles

On interprète le langage dans un univers mathématique particulier : les modèles. On parle aussi de sémantique.

Les propositions qui sont "satisfaites" (dans un sens à préciser) par le modèle sont dites valides.

Correction, cohérence et complétude établissent des liens entre

- les théorèmes (propositions prouvables)
- et les tautologies (propositions valides),

c'est-à-dire entre la prouvabilité et la validité.

7.4 Les deux branches de la logique

La partie de la logique où l'on s'intéresse plutôt aux démonstrations s'appelle la la théorie de la démonstration ou théorie de la preuve (proof theory).

La partie de la logique où l'on s'intéresse plutôt à la validité s'appelle la théorie des modèles.

8 Bibliographie

Un livre de base :

R. Lalement. Logique, Réduction, Résolution. Études et recherches en informatique. Masson, Paris, 1990.

Ma référence :

D. van Dalen. Logic and Structure. Springer Verlag, 1994.

Un livre assez complet sur la logique de l'informatique en français :

P. Gochet, P. Gribomont. Logique. Volume 1 : méthodes pour l'informatique fondamentale, HERMES, 1990

Sur la logique épistémique :

R. Fagin, Y. Halpern, Y. Moses, and M. Y. Vardi. Reasoning about Knowledge. The MIT Press, 1995.