La logique propositionnelle classique

1 En déduction naturelle

On ajoute la règle dite de réduction par l'absurde.

$$RAA \quad \frac{\Gamma, \neg p \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}$$

Attention: il ne faut pas confondre cela avec

$$\frac{\Gamma, p \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg p}$$

qui est en fait:

$$\frac{\Gamma, p \vdash \bot}{\Gamma \vdash p \Rightarrow \bot}$$

2 Exercice

Prouvez

1. $\neg\neg p \Rightarrow p$
2. $p \vee \neg p$
3. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$

3 Correction et complétude

Interprétation: une fonction de *proposition* vers $\{0, 1\}$, somme et produit modulo 2.

- $v(p \Rightarrow q) = 1 + v(p) + v(p).v(q)$
- $v(p \vee q) = v(p) + v(q) + v(p).v(q)$
- $v(p \wedge q) = v(p).v(q)$
- $\bot = 0$

$\Gamma \models_{NK} p$ signifie que si $v(q) = 1$ pour tout $q \in \Gamma$ alors $v(p) = 1$

La logique propositionnelle est correcte,
c-à-d $\Gamma \vdash_{NK} p$ implique $\Gamma \models_{NK} p$

La logique propositionnelle est complète,
c-à-d $\Gamma \models_{NK} p$ implique $\Gamma \vdash_{NK} p$