Les modèles de Kripke de la logique propositionnelle

1 Notations

À partir de maintenant, je note

1. les propositions $\varphi, \psi, \chi, \theta$ etc.
2. les variables propositionnelles p, q, r, s, t,
3. les environnements Γ, Θ, Σ

2 Les modèles de Kripke (cas général)

Un modèle de Kripke est un triplet $\mathcal{M} = (\mathcal{U}_\mathcal{M}, \mathcal{I}_\mathcal{M}, \mathcal{R}_\mathcal{M})$ où

- $\mathcal{U}_\mathcal{M}$ est un ensemble dont les éléments sont appelés
  - des mondes,
  - des mondes possibles,
  - des étapes (de raisonnement),
  - des états.
- $\mathcal{I}_\mathcal{M} : Variables \to \mathcal{P}(\mathcal{U}_\mathcal{M})$. Intuitivement $\mathcal{I}_\mathcal{M}(p)$ est l'ensembles des mondes où la variable p est satisfaite. Les mondes sont notés u, v, w.
- $\mathcal{R}_\mathcal{M} = (R_1, ..R_n)$ est un ensemble de relations dites relations d'accessibilité.
  Si $u\, R_i\, v$ alors le monde v est accessible à partir de u pour i(*On verra plus tard ce que ça signifie.*)

Les propriétés (transitivité, réflexivité, symétrie ou antisymétrie) des relations R_i jouent un rôle.

3 Les modèles de Kripke (cas propositionnel)

1. Il n'y a qu'une relation notée $\leq_\mathcal{M}$, qui est un ordre, c'est-à-dire réflexive, antisymétrique et transitive.
2. $\mathcal{I}_\mathcal{M}$ est dirigé, c'est-à-dire que pour toute variable propositionnelle p,
   Si $u \in \mathcal{I}_\mathcal{M}(p)$ et $u \leq_\mathcal{M} v$ alors $v \in \mathcal{I}_\mathcal{M}(p)$.

   "Ce qui est vrai dans un monde est vrai dans un sur-monde".

4 Forçage

On définit sur $\mathcal{U}_\mathcal{M}$ une relation dite de forçage 'u force φ". qui se note :

- $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$;
- ou $u \Vdash_\mathcal{M} \varphi$;

- ou encore $u \Vdash \varphi$ s'il n'y a pas d'ambiguïtés sur $\mathcal{M}$.

Cette relation de *forçage* est définie de la façon suivante :

1. Si φ est une variable p:

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad u \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p)$$

2. Si φ est une conjonction $\psi \wedge \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{et} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

3. Si φ est une disjonction $\psi \vee \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

4. Si φ est une implication $\psi \Rightarrow \theta$

$$\begin{gathered} \mathcal{M}, u \Vdash \varphi \\ \text{ssi} \\ \text{pour tout } v \geq_M u \text{ si } \mathcal{M}, v \Vdash \psi \text{ alors } \mathcal{M}, v \Vdash \theta \end{gathered}$$

5. Si $\perp$ est l'absurde, alors $\mathcal{M}, u \nVdash \perp$.

5 Monotonicité du forçage

Proposition $\boxed{\Vdash_{\mathcal{M}} \text{ est monotone.}}$

$$\text{Si } \mathcal{M}, u \Vdash \varphi \quad \text{et} \quad u \leq_{\mathcal{M}} v \qquad \text{alors} \qquad \mathcal{M}, v \Vdash \varphi$$

Ce résultat se montre par induction structurelle sur φ.

Donc pour tout φ, l'ensemble $\{u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \mid u \Vdash \varphi\}$ est dirigé.

6 Exercice

Soit le modèle de Kripke $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd} u_1 \arrow[dr, dash] & & u_2 \arrow[dl, dash] \\ & u_0 & \end{tikzcd}$$

où $u_0 \Vdash p$ et $u_1 \Vdash q$.

1. Donnez les valeurs de $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ pour p et q.
2. Annotez les mondes qui forcent $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$

7 Quelques définitions

1. $\mathcal{M} \models \varphi$ ($\mathcal{M}$ modélise φ, φest valide dans $\mathcal{M}$) si pour tout $u \in \mathcal{M}$, on a $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$.
2. $\models \varphi$, (φ est valide), si pour tout modèle de Kripke $\mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \models \varphi$.

Théorème de correction $\boxed{\text{Si } \vdash \varphi \text{ alors } \models \varphi.}$ "pouvable implique valide".

- On fait la preuve dans le cas de la logique intuitionniste
- On va prouver un lemme, pour lequel on a besoin d'une définition.

Définition: $\Gamma \models \varphi$ où $\Gamma \equiv \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$
signifie que pour tout modèle $\mathcal{M}$ et tout $u \in \mathcal{U}_\mathcal{M}$,

$$u \Vdash_\mathcal{M} \varphi_1, ..., u \Vdash_\mathcal{M} \varphi_n \text{ implique } u \Vdash_\mathcal{M} \varphi.$$

Lemme $\boxed{\text{Si } \Gamma \vdash \varphi \text{ alors } \Gamma \models \varphi.}$

Démonstration La démonstration se fait par induction sur la structure de l'arbre de preuve de $\Gamma \vdash \varphi$. On fixe le modèle $\mathcal{M}$ dans la preuve. On suppose que pour tout u, on a $u \Vdash_\mathcal{M} \varphi_1, ..., u \Vdash_\mathcal{M} \varphi_n$. Et on cherche à montrer que $u \Vdash_\mathcal{M} \varphi$.

1. Si l'arbre est réduit à une feuille. Alors $\varphi \in \Gamma$ et comme $u \Vdash_\mathcal{M} \varphi_1, ..., u \Vdash_\mathcal{M} \varphi_n$, on a $u \Vdash_\mathcal{M} \varphi$
2. Si le nœud de la racine est la règle $\Rightarrow$I et donc le jugement est $\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \theta$.
   Par induction il existe un arbre de preuve pour $\Gamma, \psi \vdash \theta$.
   L'hypothèse d'induction nous dit que pour n'importe quel monde w tel que
   $$w \Vdash \varphi_1, ..., w \Vdash \varphi_n, w \Vdash \psi$$
   on a
   $$w \Vdash \theta.$$
   Considérons maintenant un monde u tel que
   $$u \Vdash \varphi_1, ..., u \Vdash \varphi_n.$$
   Si v est monde tel que $u \leq_\mathcal{M} v$ et $v \Vdash \psi$.
   Par monotonicité,
   $$v \Vdash \varphi_1, ..., v \Vdash \varphi_n.$$
   On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à v et l'on a $v \Vdash \theta$.
   Par la définition de $\Vdash$ sur $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \theta$ cela donne $u \Vdash \varphi$.
3. Si le nœud de la racine est la règle $\Rightarrow$E
   On a donc deux arbres de preuve pour $\Gamma \vdash \psi$ et $\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi$.
   Soit u tel que
   $$u \Vdash \varphi_1, ..., u \Vdash \varphi_n.$$
   alors par hypothèse d'induction d'une part $u \Vdash \psi$ d'autre part $u \Vdash \psi \Rightarrow \varphi$.
   Par définition de $u \Vdash \psi \Rightarrow \varphi$, on a $u \Vdash \varphi$.

4. Si le nœud de la racine est la règle $\perp$.

   Si $u \Vdash \psi$ (pour tout $\psi \in \Gamma$) alors $u \Vdash \perp$, mais on sait que ça n'est pas possible, donc chaque fois qu'on a $u \Vdash \psi$ (pour tout $\psi \in \Gamma$), on aussi $u \Vdash \varphi$, donc $\Gamma \models \varphi$.

5. Si le nœud de la racine est la règle $\vee I_g$ avec $\Gamma \vdash \theta \vee \chi$.

   L'hypothèse d'induction dit que pour tout $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$

   - si pour tout $\psi \in \Gamma$ on a $u \Vdash \psi$ alors $u \Vdash \theta$,

   donc aussi $u \Vdash \theta \vee \chi$.

6. Si le nœud de la racine est la règle $\vee E_g$ avec comme prémisse

   $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi,$ $\qquad$ $\Gamma, \varphi \vdash \theta$ $\quad$ et $\quad$ $\Gamma, \psi \vdash \theta$

   et comme conclusion $\Gamma \vdash \theta$.

   Considerons les u qui satisfont $u \Vdash \chi$ pour $\chi \in \Gamma$.

   L'hypothèse d'induction nous dit que pour ces u, on doit avoir $u \Vdash \varphi \vee \psi$.

   Si de plus $u \Vdash \varphi$ alors $u \Vdash \theta$.

   Et si de plus $u \Vdash \psi$ alors $u \Vdash \theta$ aussi.

   Mais comme on sait que $u \Vdash \varphi$ ou $u \Vdash \psi$ alors dans tous les cas $u \Vdash \theta$.