# *Introduction au lambda-calcul*

## 1 Les fonctions comme citoyens de première classe

On peut faire que les preuves soient citoyens de première classe, mais pourquoi pas les fonctions ?

## 2 Quelques dates

**autour de 1870** un Italien[1] s'oppose à Cantor sur le point de savoir quel est le concept de base des mathématiques prétendant que ça devrait être les fonctions.

**1920** *Schönfinkel* initie la logique combinatoire,

**1925** *Haskell Curry* crée la logique combinatoire,

**1936** *Alonso Church* crée le $\lambda$-calcul,

**1970-...** Explosion du $\lambda$-calcul dûe à l'informatique (de Bruijn, Barendregt, Berry, Boehm, Girard, Klop, Krivine, Levy, Plotkin, Scott, mais aussi Curien, Statmann etc.)

## 3 Des notations différentes, un même concept

| | | |
|---|---|---|
| en maths | $x \mapsto x$ | $f \mapsto (x \mapsto f(f(x)))$ |
| en CAML | `fun x -> x` | `fun f -> (fun x -> (f (f x)))` |
| en $\lambda$-calcul | $\lambda x.x$ | $\lambda f.(\lambda x.(f(fx)))$ |

## 4 La syntaxe

La classe $\Lambda$ est la plus petite classe qui contient

1. $x$ si $x$ est une variable,
2. $\lambda x.M$ si $M \in \Lambda$,
3. $(MN)$ si $M \in \Lambda$ et $N \in \Lambda$.

## 5 Qu'y a-t-il derrière la syntaxe ?

### 5.1 Signification des termes

On peut voir les termes comme des abstractions des fonctions ou des programmes fonctionnels.

Dans $\lambda x.M$, on dit que $M$ est le corps de la fonction ou du programme.

Dans $(MN)$, on peut voir $M$ comme une fonction que l'on applique au paramètre $N$. La valeur va s'obtenir par «réduction» (approche intentionnelle).

Le lambda-calcul décrit les fonctions par leur comportement.

[1] dont j'ai oublié le nom.

### 5.2 L'anecdote derrière la syntaxe

Au début Church voulait écrire $\hat{\mathtt{x}}$.
Mais au temps des machines à écrire on ne savait écrire que `^x`.
Ce qui a donné $\Lambda\mathtt{x}$, puis $\lambda\mathtt{x}$.

## 6 Variables et substitutions

### 6.1 Les variables liées

$$\begin{array}{rcl} BV(x) & = & \emptyset \\ BV(\lambda x.M) & = & BV(M) \cup \{x\} \\ BV(MN) & = & BV(M) \cup BV(N) \end{array}$$

### 6.2 Exemples

$$\begin{array}{rcl} BV(\lambda x.x) & = & \{x\} \\ BV(\lambda f.(\lambda x.(f(fx)))) & = & \{f,x\} \\ BV(\lambda f.(\lambda x.(f(fxy)y))) & = & \{f,x\} \end{array}$$

### 6.3 Les variables libres

$$\begin{array}{rcl} FV(x) & = & \{x\} \\ FV(\lambda x.M) & = & FV(M) - \{x\} \\ FV(MN) & = & FV(M) \cup FV(N) \end{array}$$

### 6.4 Exemples

$$\begin{array}{rcl} FV(\lambda x.x) & = & \emptyset \\ FV(\lambda f.(\lambda x.(f(fx)))) & = & \emptyset \\ FV(\lambda f.(\lambda x.(f(fxy)y))) & = & \{y\} \\ FV(\lambda x.(f(fx))) & = & \{f\} \end{array}$$

### 6.5 Les variables libres (suite)

Un terme qui n'a pas de variable libre est dit clos ou fermé ou est appelé un combinateur.

### 6.6 Les variables libres (suite)

Un terme qui n'a pas de variable libre est dit clos ou fermé ou est appelé un combinateur.

ATTENTION ! Une variable peut être à la fois libre et liée dans un terme.
Par exemple : $x(\lambda x.x)$.

## 7 Convention

1. Au lieu de $\lambda x_1(...(\lambda x_n.M)...)$, on écrit $\lambda x_1...x_n.M$.
   Par exemple : $\lambda fx.f(fx)$.
2. Au lieu de $(...(MN_1)...N_p)$, on écrit $MN_1...N_p$ ou $M\vec{N}$, si $\vec{N} = (N_1...N_p)$.
   Par exemple : $\lambda xyg.gxy$.

$((\lambda x.x)y)y)$ donne $(\lambda x.x)yy$

## 8 Le produit cartésien et la curryfication

Il n'y a pas de produit cartésien dans le $\lambda$-calcul simple.
Si on veut écrire :

$$\lambda(x, y).f(x, y)$$

on le remplace par

$$\lambda xy.fxy$$

C'est la curryfication (nommée après Haskell Curry).

## 9 Substitution

### 9.1 Substitution

Substituer une variable par un terme ne consiste pas simplement à remplacer toutes les occurrences de la variable par ce terme, à cause du phénomène de capture.

Quand on écrit $M[x := P]$ on ne remplace pas simplement les occurrences de $x$ dans $M$ par $P$.
Ainsi on a :

$$\begin{aligned} x(\lambda x.x)[x := y] &\neq y(\lambda x.y) \\ (\lambda y.x)[x := y] &\neq \lambda x.x \end{aligned}$$

donc il faut être prudent.

### 9.2 Substitution avec renommage

1. $x[x := P] = P$
2. $y[x := P] = y$
3. $(\lambda x.M)[x := P] = \lambda x.M$
4. $(\lambda y.M)[x := P] = \lambda y.(M[x := P])$
   si $x \notin FV(M)$ ou $y \notin FV(P)$
5. $(\lambda y.M)[x := P] = \lambda z.(M[y := z][x := P])$
   si $x \in FV(M)$ et $y \in FV(P)$
   et $z$ est une nouvelle variable
6. $(M_1M_2)[x := P] = M_1[x := P]M_2[x := P]$

### 9.3 La convention de Barendregt

C'est une convention sur les variables libres d'un terme dans un énoncé mathématique.

| Il n'existe aucun sous-terme dans lequel une variable apparaît à la fois libre et liée. |
|---|

# 10 L'$\alpha$-conversion

## 10.1 Définition

$$\lambda x.N \equiv_\alpha \lambda y.(N[x := y]) \qquad y \notin FV(N)$$

$$\frac{M_1 \equiv_\alpha N_1 \qquad M_2 \equiv_\alpha N_2}{M_1 M_2 \equiv_\alpha N_1 N_2}$$

$$\frac{M \equiv_\alpha N}{\lambda z.M \equiv_\alpha \lambda z.N}$$

$$x \equiv_\alpha x$$

L'$\alpha$-conversion ne change pas la «signification» des termes.

## 10.2 Substitution et convention de Barendregt

**La convention de Barendregt**

– On suppose que dans tout théorème que l'on énonce, on suit la convention de Barendregt.

– Si l'on a un terme qui ne satisfait pas la convention de Barendregt, on s'y ramène par $\alpha$-conversion

Avec la convention de Barendregt, la définition des substitutions devient beaucoup plus simple :

– $x[x := P] = P$
– $y[x := P] = y$
– $(\lambda y.M)[x := P] = \lambda y.M[x := P]$
– $(M_1 M_2)[x := P] = M_1[x := P]M_2[x := P]$

# 11 La $\beta$-réduction et les autres réductions

## 11.1 La règle $\beta$

Les fonctions sont faites pour calculer !
Les réductions d'un terme représentent son calcul.
La $\beta$-réduction est l'étape élémentaire.

$$(\lambda x.M)P \xrightarrow[\beta]{} M[x := P]$$

## 11.2 R-réduction

On se donne un ensemble $R$ de règles, c-à-d de paires de termes, par exemple $\beta$.
$M \xrightarrow[R]{} N$ signifie que $M$ se réduit à $N$ par $R$ en une étape.

$$\text{(règle)} \quad \frac{(M,N) \in R}{M \xrightarrow[R]{} N} \qquad (\xi) \quad \frac{M \xrightarrow[R]{} N}{\lambda x M \xrightarrow[R]{} \lambda x N}$$

$$\text{(congruence gauche)} \quad \frac{M \xrightarrow[R]{} N}{MP \xrightarrow[R]{} NP} \qquad \text{(congruence droite)} \quad \frac{M \xrightarrow[R]{} N}{PM \xrightarrow[R]{} PN}$$

## 11.3 Exercice

Réduire :

- $\lambda y.(\lambda x.x)z$
- $(\lambda fx.f(fx))(\lambda x.x)$
- $(\lambda fx.f(fx))(\lambda fx.fx)$

## 11.4 D'autres exemples de reductions

La réduction $\eta$ : Pour tout $M \in \Lambda$ et $x \notin FV(M)$,

$$\lambda x.Mx \quad \xrightarrow[\eta]{} \quad M.$$

L'expansion $\eta$ : Pour tout $M \in \Lambda$ et $x \notin FV(M)$,

$$M \quad \xrightarrow[\eta_{exp}]{} \quad \lambda x.Mx.$$

La réduction par $\beta$ et $\eta$

$$\xrightarrow[\beta\eta]{} \;=\; \xrightarrow[\beta]{} \;\cup\; \xrightarrow[\eta]{}\;.$$

## 11.5 Fermeture transitive et réflexive

$$\text{(cas de base)} \; \frac{M \xrightarrow[R]{} N}{M \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow N} \qquad \text{(réflexivité)} \quad M \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow M$$

$$\text{(transitivité)} \; \frac{M \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow N \qquad N \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow L}{M \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow L}$$

Proposition $\boxed{\text{Congruence de } \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\rightarrow}$

$$\frac{M \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\rightarrow N}{\lambda x.M \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\rightarrow \lambda x.N}$$

$$\frac{M \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\rightarrow N \qquad P \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\rightarrow Q}{MP \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\rightarrow NQ}$$

**Démonstration** On fait une récurrence sur la longueur de l'arbre de preuve et on choisit de montrer la première inférence. Trois cas se présentent :

1. $M \xrightarrow[\beta]{} N$, on a utilisé le «cas de base», alors par $(\xi)$, $\lambda x.M \xrightarrow[\beta]{} \lambda x.N$ et on conclut par le «cas de base».
2. $M \equiv N$, alors $\lambda x.M \equiv \lambda x.N$ et conclut par «réflexivité».
3. Il existe $P$ tel que $M \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\rightarrow P$ et $P \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\rightarrow N$. Par induction, on tire,
   - $\lambda x.M \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\rightarrow \lambda x.P$
   - et $\lambda x.P \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\rightarrow \lambda x.N$,

   et par «transitivité» $\lambda x.M \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\rightarrow \lambda x.N$.

### 11.6 Fermeture transitive, réflexive et symétrique

Avec les règles

$$\text{(cas de base)}\ \frac{M \xrightarrow[R]{} N}{M \xleftrightarrow[R]{} N} \qquad \text{(réflexivité)}\ M \xleftrightarrow[R]{} M$$

$$\text{(transitivité)}\ \frac{M \xleftrightarrow[R]{} N \qquad N \xleftrightarrow[R]{} L}{M \xleftrightarrow[R]{} L} \qquad \text{(symétrie)}\ \frac{M \xleftrightarrow[R]{} N}{N \xleftrightarrow[R]{} M}$$

on obtient la fermeture transitive, réflexive et symétrique de $\xrightarrow[R]{}$ .

- Elle s'écrit $=_R$ ou $\xleftrightarrow[R]{}$ ,
- Elle se dit $R$-égal ou $R$-convertible ou $R$-équivalent .

## 12 L'égalité extensionnelle

### 12.1 Définition

$\xleftrightarrow[\beta]{}$ décrit l'égalité intentionnelle, si $M \xleftrightarrow[\beta]{} N$ et si $M$ et $N$ ont le même «comportement» (c'est à dire même comportement pour la $\beta$-réduction.

Deux termes sont extensionnellement équivalent s'ils prennent le mêmes «valeurs» quand on les appliquent au même terme.

### 12.2 Règle

On a aussi la règle

$$\text{(ext)}\ \frac{Mx = Nx}{M = N} \qquad x \notin FV(MN)$$

Par les règles cas de base pour $\beta$ + réflexivité + transitivité + symétrie + ext on définit une relation $\xleftrightarrow[\text{ext}]{}$ .

Et on récupère la proposition : Proposition $\boxed{\xleftrightarrow[ext]{} \text{ est équivalent à } \xleftrightarrow[\beta\eta]{} .}$

**Démonstration**

- Pour montrer que $\xleftrightarrow[\beta\eta]{} \subseteq \xleftrightarrow[\text{ext}]{}$ il suffit de montrer que si $P \xrightarrow[\eta]{} Q$ alors $P \xleftrightarrow[\text{ext}]{} Q$
  donc il suffit de montrer que pour $x \notin FV(M)$ $(\lambda x.Mx) \xleftrightarrow[\text{ext}]{} M$
  En fait, il suffit de montrer qu'on a $(\lambda x.Mx)x \xleftrightarrow[\beta]{} Mx$.
  Par le *cas de base* et la définition de $\xrightarrow[\beta]{}$ , cela vient de $(\lambda x.Mx)x \xrightarrow[\beta]{} (Mx)[x := x] \equiv Mx$.
- Pour montrer que $\xleftrightarrow[\text{ext}]{} \subseteq \xleftrightarrow[\beta\eta]{}$ ,, il suffit de montrer que ext est une règle dérivée dans $\xleftrightarrow[\beta\eta]{}$ .
  Supposons $Mx \xleftrightarrow[\beta\eta]{} Nx$ avec $x \notin FV(MN)$, alors $\lambda x.Mx \xleftrightarrow[\beta\eta]{} \lambda x.Nx$ par $\xi$, donc par $\eta$ appliquée deux fois, on a :

  $$M \xleftarrow[\eta]{} \lambda x.Mx \xleftrightarrow[\beta\eta]{} \lambda x.Nx \xrightarrow[\eta]{} N, \text{ soit } M \xleftrightarrow[\beta\eta]{} N.$$

# 13 Contexte

Un contexte $C[\,]$ est défini ainsi

1. $[\,]$ est un contexte,
2. si $M \in \Lambda$ et si $C[\,]$ est un contexte alors $MC[\,]$ et $C[\,]M$ sont des contextes,
3. si $C[\,]$ est un contexte alors $\lambda x.C[\,]$ est un contexte.

## 13.1 Définition

Si $C[\,]$ est un contexte et $A \in \Lambda$ alors $C[A]$ est défini par induction sur $C[\,]$ :

- $[A] = A$,
- si $C[\,] = \lambda D[\,]$ alors $C[A] = \lambda D[A]$,
- si $C[\,] = MD[\,]$ alors $C[A] = MD[A]$,
- etc.

## 13.2 Stabilité par contexte

Proposition $\xrightarrow[R]{}$ , $\underset{R}{\twoheadrightarrow}$ et $\underset{R}{\twoheadleftarrow\!\twoheadrightarrow}$ sont stables par contexte ou compatibles.

$\boxed{\xrightarrow[R]{} \text{ est stable par contexte.}}$

**Démonstration :**

On montre que si$M \xrightarrow[R]{} N$ alors $C[M] \xrightarrow[R]{} C[N]$, par induction sur la structure de $C[\,]$, sachant que $M \xrightarrow[R]{} N$.

1. $C[\,] = [\,]$ alors $C[M] = M$ et $C[N] = N$, évident.
2. $C[\,] = AD[\,]$,
   - par induction $D[M] \xrightarrow[R]{} D[N]$,
   - d'autre part, $C[M] = AD[M]$ et $C[N] = AD[N]$,
   - donc par congruence à droite $C[M] \xrightarrow[R]{} C[N]$.
3. $C[\,] = D[\,]A$, comme 2 en changeant «droite» en «gauche».
4. $C[\,] = \lambda x.D[\,]A$, par induction $D[M] \xrightarrow[R]{} D[N]$, d'où la conclusion par $(\xi)$.

## 13.3 Stabilité par substitution

Proposition $\boxed{M \underset{R}{\twoheadrightarrow} N \text{ implique } A[x := M] \underset{R}{\twoheadrightarrow} A[x := N].}$

**Démonstration :**

L'hypothèse est $M \underset{R}{\twoheadrightarrow} N$. La démonstration se fait par induction sur $A$.

- $A \equiv x$, alors $A[x := M] \equiv M \underset{R}{\twoheadrightarrow} N \equiv A[x := M]$.
- $A \equiv y$, alors $A[x := M] \equiv y \underset{R}{\twoheadrightarrow} y \equiv A[x := M]$, par réflexivité.
- $A \equiv \lambda y.B$,
  par induction $B[x := M] \underset{R}{\twoheadrightarrow} B[x := N]$,
  donc $A[x := M] \equiv \lambda y.B[x := N]$ et $A[x := N] \equiv \lambda y.B[x := N]$,
  par congruence de $\underset{R}{\twoheadrightarrow}$ , on a $\lambda y.B[x := M] \underset{R}{\twoheadrightarrow} \lambda y.B[x := N]$.

- $A \equiv BB'$
  par induction $B[x := M] \xrightarrow[R]{} B[x := N]$ et $B'[x := M] \xrightarrow[R]{} B'[x := N]$,
  par définition de la substitution $A[x := M] \equiv B[x := M]B'[x := M]$
  et $A[x := N] \equiv B[x := N]B'[x := N]$,
  par congruence de $\xrightarrow[R]{}$ on a $A[x := M] \xrightarrow[R]{} A[x := N]$.

### 13.4 Exercice

Montrez que ça ne peut pas marcher pour $\xrightarrow[R]{}$ ,c'est à dire qu'on n'a pas :
$M \xrightarrow[R]{} N$ implique $A[x := M] \xrightarrow[R]{} A[x := N]$.

### 13.5 D'autres exemples de termes

$\omega \equiv \lambda x.xx$
$\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
$\mathsf{Y} \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ Y est appelé combinateur point fixe de Curry.
$\mathsf{W}_F \equiv (\lambda x.F(xx))$

### 13.6 Exercices

1. Montrez que $\Omega$ se réécrit vers un unique terme. Lequel ? Plus précisément, montrez qu'il existe un terme unique $M \in \Lambda$ tel que $\Omega \xrightarrow[\beta]{} M$.
2. Montrez que $\mathsf{Y}F \xrightarrow[\beta]{} F(\mathsf{W}_F\mathsf{W}_F)$.
3. Montrez que $F(\mathsf{Y}F) \xrightarrow[\beta]{} F(\mathsf{W}_F\mathsf{W}_F)$.
4. Conclure que $\mathsf{Y}F \xleftrightarrow[\beta]{} F(\mathsf{Y}F)$.

## 14 Redex et formes normales

### 14.1 Définitions

- Un R-redex est un terme $M$ tel que $(M, N) \in R$.
- $N$ et le R-contracté de $M$.
- Un terme $M$ est R-irreductible si $M$ ne contient aucun R-redex.
- Un terme $N$ est une forme normale de $M$, si $N$ est R-irréductible et si $M \xleftrightarrow[R]{} N$.

### 14.2 Formes normales

On n'affirme
- ni l'existence (cf $\Omega$),
- ni l'unicité, il y a unicité pour $\beta$ et $\beta \cup \eta_{exp}$, mais il faut le prouver.

La forme normale si elle existe est la valeur intentionnelle.

### 14.3 Exercice

Lesquels de ces termes sont des formes normales ?
$(\lambda x.x)$
$((\lambda xy.x)v)w$
$((\lambda xy.xv))w$
$(\lambda xy.x)vw$

# 15 Entiers de Church

## 15.1 Définition

- $(\lambda fx.f(fx)) \equiv \mathbf{2}$ correspond au nombre entier deux.
- $(\lambda fx.x) \equiv K$ correspond à zéro.
- $(\lambda fx.fx) \equiv \mathbf{1}$ correspond à un.
- Plus généralement l'entier **n** est le terme $(\lambda fx.(f^n x))$.

## 15.2 Exercices

1. Montrez que $\mathbf{1} \xrightarrow[\eta]{} I$.
2. Calculez
   - $\mathbf{12}$,
   - $\mathbf{21}$,
   - $\mathbf{22}$,
3. A quoi correspond $\mathbf{mn}$ ?