

# Introduction au lambda-calcul

## 1 Les fonctions comme citoyens de première classe

On peut faire que les **preuves** soient **citoyens de première classe**, mais pourquoi pas les **fonctions** ?

## 2 Quelques dates

**autour de 1870** un Italien<sup>1</sup> s'oppose à Cantor sur le point de savoir quel est le concept de base des mathématiques prétendant que ça devrait être les fonctions.

**1920** *Schönfinkel* initie la logique combinatoire,

**1925** *Haskell Curry* crée la logique combinatoire,

**1936** *Alonso Church* crée le  $\lambda$ -calcul,

**1970-...** Explosion du  $\lambda$ -calcul due à l'informatique (de Bruijn, Barendregt, Berry, Boehm, Girard, Klop, Krivine, Levy, Plotkin, Scott, mais aussi Curien, Statmann etc.)

## 3 Des notations différentes, un même concept

en maths	$x \mapsto x$		$f \mapsto (x \mapsto f(f(x)))$
en CAML	<code>fun x -&gt; x</code>		<code>fun f -&gt; (fun x -&gt; (f (f x)))</code>
en $\lambda$ -calcul	$\lambda x.x$		$\lambda f.(\lambda x.(f(fx)))$

## 4 La syntaxe

La classe  $\Lambda$  est la plus petite classe qui contient

1.  $x$  si  $x$  est une variable,
2.  $\lambda x.M$  si  $M \in \Lambda$ ,
3.  $(MN)$  si  $M \in \Lambda$  et  $N \in \Lambda$ .

## 5 Qu'y a-t-il derrière la syntaxe ?

### 5.1 Signification des termes

On peut voir les termes comme des abstractions des fonctions ou des programmes fonctionnels.

Dans  $\lambda x.M$ , on dit que  $M$  est le **corps** de la fonction ou du programme.

Dans  $(MN)$ , on peut voir  $M$  comme une fonction que l'on **applique** au paramètre  $N$ . La **valeur** va s'obtenir par «réduction» (approche intentionnelle).

Le lambda-calcul décrit les fonctions par leur **comportement**.

---

<sup>1</sup>dont j'ai oublié le nom.

## 5.2 L'anecdote derrière la syntaxe

Au début Church voulait écrire  $\lambda x$ .

Mais au temps des machines à écrire on ne savait écrire que  $\hat{x}$ .

Ce qui a donné  $\Lambda x$ , puis  $\lambda x$ .

## 6 Variables et substitutions

### 6.1 Les variables liées

$$\begin{aligned}BV(x) &= \emptyset \\BV(\lambda x.M) &= BV(M) \cup \{x\} \\BV(MN) &= BV(M) \cup BV(N)\end{aligned}$$

### 6.2 Exemples

$$\begin{aligned}BV(\lambda x.x) &= \{x\} \\BV(\lambda f.(\lambda x.(f(fx)))) &= \{f, x\} \\BV(\lambda f.(\lambda x.(f(fxy)y))) &= \{f, x\}\end{aligned}$$

### 6.3 Les variables libres

$$\begin{aligned}FV(x) &= \{x\} \\FV(\lambda x.M) &= FV(M) - \{x\} \\FV(MN) &= FV(M) \cup FV(N)\end{aligned}$$

### 6.4 Exemples

$$\begin{aligned}FV(\lambda x.x) &= \emptyset \\FV(\lambda f.(\lambda x.(f(fx)))) &= \emptyset \\FV(\lambda f.(\lambda x.(f(fxy)y))) &= \{y\} \\FV(\lambda x.(f(fx))) &= \{f\}\end{aligned}$$

### 6.5 Les variables libres (suite)

Un terme qui n'a pas de variable libre est dit **clos** ou **fermé** ou est appelé un **combinateur**.

### 6.6 Les variables libres (suite)

Un terme qui n'a pas de variable libre est dit **clos** ou **fermé** ou est appelé un **combinateur**.

ATTENTION ! Une variable peut être **à la fois libre et liée** dans un terme.

Par exemple :  $x(\lambda x.x)$ .

## 7 Convention

1. Au lieu de  $\lambda x_1(\dots(\lambda x_n.M)\dots)$ , on écrit  $\lambda x_1\dots x_n.M$ .  
Par exemple :  $\lambda fx.f(fx)$ .
2. Au lieu de  $(\dots(MN_1)\dots N_p)$ , on écrit  $MN_1\dots N_p$  ou  $M\vec{N}$ , si  $\vec{N} = (N_1\dots N_p)$ .  
Par exemple :  $\lambda xyg.gxy$ .

$((\lambda x.x)y)y$  donne  $(\lambda x.x)yy$

## 8 Le produit cartésien et la curryfication

Il n'y a pas de produit cartésien dans le  $\lambda$ -calcul simple.  
Si on veut écrire :

$$\lambda(x,y).f(x,y)$$

on le remplace par

$$\lambda xy.fxy$$

C'est la **curryfication** (nommée après Haskell Curry).

## 9 Substitution

### 9.1 Substitution

Substituer une variable par un terme ne consiste pas simplement à remplacer toutes les occurrences de la variable par ce terme, à cause du **phénomène de capture**.

Quand on écrit  $M[x := P]$  on ne remplace pas simplement les occurrences de  $x$  dans  $M$  par  $P$ .  
Ainsi on a :

$$\begin{aligned}x(\lambda x.x)[x := y] &\neq y(\lambda x.y) \\ (\lambda y.x)[x := y] &\neq \lambda x.x\end{aligned}$$

donc il faut être prudent.

### 9.2 Substitution avec renommage

1.  $x[x := P] = P$
2.  $y[x := P] = y$
3.  $(\lambda x.M)[x := P] = \lambda x.M$
4.  $(\lambda y.M)[x := P] = \lambda y.(M[x := P])$   
si  $x \notin FV(M)$  ou  $y \notin FV(P)$
5.  $(\lambda y.M)[x := P] = \lambda z.(M[y := z][x := P])$   
si  $x \in FV(M)$  et  $y \in FV(P)$   
et  $z$  est une **nouvelle** variable
6.  $(M_1M_2)[x := P] = M_1[x := P]M_2[x := P]$

### 9.3 La convention de Barendregt

C'est une **convention sur les variables libres** d'un terme **dans un énoncé mathématique**.

Il n'existe aucun sous-terme dans lequel une variable apparaît à la fois libre et liée.

## 10 L'α-conversion

### 10.1 Définition

$$\lambda x.N \equiv_{\alpha} \lambda y.(N[x := y]) \quad y \notin FV(N)$$

$$\frac{M_1 \equiv_{\alpha} N_1 \quad M_2 \equiv_{\alpha} N_2}{M_1 M_2 \equiv_{\alpha} N_1 N_2}$$

$$\frac{M \equiv_{\alpha} N}{\lambda z.M \equiv_{\alpha} \lambda z.N}$$

$$x \equiv_{\alpha} x$$

L'α-conversion ne change pas la «signification» des termes.

### 10.2 Substitution et convention de Barendregt

#### La convention de Barendregt

- On suppose que dans tout théorème que l'on énonce, on suit la convention de Barendregt.
- Si l'on a un terme qui ne satisfait pas la convention de Barendregt, on s'y ramène par α-conversion

Avec la convention de Barendregt, la définition des substitutions devient beaucoup plus simple :

- $x[x := P] = P$
- $y[x := P] = y$
- $(\lambda y.M)[x := P] = \lambda y.M[x := P]$
- $(M_1 M_2)[x := P] = M_1[x := P] M_2[x := P]$

## 11 La β-réduction et les autres réductions

### 11.1 La règle β

Les fonctions sont faites pour calculer!  
 Les réductions d'un terme représentent son calcul.  
 La β-réduction est l'étape élémentaire.

$$(\lambda x.M)P \xrightarrow{\beta} M[x := P]$$

### 11.2 R-réduction

On se donne un ensemble  $R$  de règles, c-à-d de paires de termes, par exemple β.

$M \xrightarrow{R} N$  signifie que  $M$  se réduit à  $N$  par  $R$  en une étape.

$$\text{(règle)} \quad \frac{(M, N) \in R}{M \xrightarrow{R} N} \quad (\xi) \quad \frac{M \xrightarrow{R} N}{\lambda x M \xrightarrow{R} \lambda x N}$$

$$\text{(congruence gauche)} \quad \frac{M \xrightarrow{R} N}{MP \xrightarrow{R} NP} \quad \text{(congruence droite)} \quad \frac{M \xrightarrow{R} N}{PM \xrightarrow{R} PN}$$

### 11.3 Exercice

Réduire :

- $\lambda y.(\lambda x.x)z$
- $(\lambda fx.f(fx))(\lambda x.x)$
- $(\lambda fx.f(fx))(\lambda fx.fx)$

### 11.4 D'autres exemples de reductions

La réduction  $\eta$  : Pour tout  $M \in \Lambda$  et  $x \notin FV(M)$ ,

$$\lambda x.Mx \xrightarrow{\eta} M.$$

L'expansion  $\eta$  : Pour tout  $M \in \Lambda$  et  $x \notin FV(M)$ ,

$$M \xrightarrow{\eta_{exp}} \lambda x.Mx.$$

La réduction par  $\beta$  et  $\eta$

$$\xrightarrow{\beta\eta} = \xrightarrow{\beta} \cup \xrightarrow{\eta} .$$

### 11.5 Fermeture transitive et réflexive

$$\text{(cas de base)} \frac{M \xrightarrow{R} N}{M \xrightarrow{R} N} \quad \text{(réflexivité)} \quad M \xrightarrow{R} M$$

$$\text{(transitivité)} \frac{M \xrightarrow{R} N \quad N \xrightarrow{R} L}{M \xrightarrow{R} L}$$

Proposition Congruence de  $\xrightarrow{\beta}$

$$\frac{M \xrightarrow{\beta} N}{\lambda x.M \xrightarrow{\beta} \lambda x.N}$$

$$\frac{M \xrightarrow{\beta} N \quad P \xrightarrow{\beta} Q}{MP \xrightarrow{\beta} NQ}$$

**Démonstration** On fait une récurrence sur la longueur de l'arbre de preuve et on choisit de montrer la première inférence. Trois cas se présentent :

1.  $M \xrightarrow{\beta} N$ , on a utilisé le «cas de base», alors par  $(\xi)$ ,  $\lambda x.M \xrightarrow{\beta} \lambda x.N$  et on conclut par le «cas de base».
2.  $M \equiv N$ , alors  $\lambda x.M \equiv \lambda x.N$  et conclut par «réflexivité».
3. Il existe  $P$  tel que  $M \xrightarrow{\beta} P$  et  $P \xrightarrow{\beta} N$ . Par induction, on tire,
  - $\lambda x.M \xrightarrow{\beta} \lambda x.P$
  - et  $\lambda x.P \xrightarrow{\beta} \lambda x.N$ ,
 et par «transitivité»  $\lambda x.M \xrightarrow{\beta} \lambda x.N$ .

## 11.6 Fermeture transitive, réflexive et symétrique

Avec les règles

$$\begin{array}{c}
 \text{(cas de base)} \quad \frac{M \xrightarrow{R} N}{M \xleftrightarrow{R} N} \quad \text{(réflexivité)} \quad M \xleftrightarrow{R} M \\
 \\
 \text{(transitivité)} \quad \frac{M \xleftrightarrow{R} N \quad N \xleftrightarrow{R} L}{M \xleftrightarrow{R} L} \quad \text{(symétrie)} \quad \frac{M \xleftrightarrow{R} N}{N \xleftrightarrow{R} M}
 \end{array}$$

on obtient la fermeture transitive, réflexive et symétrique de  $\xrightarrow{R}$ .

- Elle s'écrit  $=_R$  ou  $\xleftrightarrow{R}$ ,
- Elle se dit **R-égal** ou **R-convertible** ou **R-équivalent**.

## 12 L'égalité extensionnelle

### 12.1 Définition

$\xleftrightarrow{\beta}$  décrit l'égalité **intentionnelle**, si  $M \xleftrightarrow{\beta} N$  et si  $M$  et  $N$  ont le même «comportement» (c'est à dire même comportement pour la  $\beta$ -réduction).

Deux termes sont **extensionnellement équivalent** s'ils prennent le mêmes «valeurs» quand on les applique au même terme.

### 12.2 Règle

On a aussi la règle

$$\text{(ext)} \quad \frac{Mx = Nx}{M = N} \quad x \notin FV(MN)$$

Par les règles **cas de base** pour  $\beta$  + **réflexivité** + **transitivité** + **symétrie** + **ext** on définit une relation  $\xleftrightarrow{\text{ext}}$ .

Et on récupère la proposition : **Proposition**  $\xleftrightarrow{\text{ext}}$  est équivalent à  $\xleftrightarrow{\beta\eta}$ .

#### Démonstration

- **Pour montrer que**  $\xleftrightarrow{\beta\eta} \subseteq \xleftrightarrow{\text{ext}}$  **il suffit de montrer que si**  $P \xrightarrow{\eta} Q$  **alors**  $P \xleftrightarrow{\text{ext}} Q$

donc il suffit de montrer que pour  $x \notin FV(M)$   $(\lambda x.Mx) \xleftrightarrow{\text{ext}} M$

En fait, il suffit de montrer qu'on a  $(\lambda x.Mx)x \xleftrightarrow{\beta} Mx$ .

Par le *cas de base* et la définition de  $\xrightarrow{\beta}$ , cela vient de  $(\lambda x.Mx)x \xrightarrow{\beta} (Mx)[x := x] \equiv Mx$ .

- **Pour montrer que**  $\xleftrightarrow{\text{ext}} \subseteq \xleftrightarrow{\beta\eta}$ , **il suffit de montrer que ext est une règle dérivée dans**  $\xleftrightarrow{\beta\eta}$ .

Supposons  $Mx \xleftrightarrow{\beta\eta} Nx$  avec  $x \notin FV(MN)$ , alors  $\lambda x.Mx \xleftrightarrow{\beta\eta} \lambda x.Nx$  par  $\xi$ , donc par  $\eta$  appliquée deux fois, on a :

$$M \xleftarrow{\eta} \lambda x.Mx \xleftrightarrow{\beta\eta} \lambda x.Nx \xrightarrow{\eta} N, \text{ soit } M \xleftrightarrow{\beta\eta} N.$$

## 13 Contexte

Un contexte  $C[ ]$  est défini ainsi

1.  $[ ]$  est un contexte,
2. si  $M \in \Lambda$  et si  $C[ ]$  est un contexte alors  $MC[ ]$  et  $C[ ]M$  sont des contextes,
3. si  $C[ ]$  est un contexte alors  $\lambda x.C[ ]$  est un contexte.

### 13.1 Définition

Si  $C[ ]$  est un contexte et  $A \in \Lambda$  alors  $C[A]$  est défini par induction sur  $C[ ]$  :

- $[A] = A$ ,
- si  $C[ ] = \lambda D[ ]$  alors  $C[A] = \lambda D[A]$ ,
- si  $C[ ] = MD[ ]$  alors  $C[A] = MD[A]$ ,
- etc.

### 13.2 Stabilité par contexte

**Proposition**  $\xrightarrow{R}$ ,  $\xrightarrow{R}$  et  $\xleftarrow{R}$  sont stables par contexte ou compatibles.

$\xrightarrow{R}$  est stable par contexte.

**Démonstration :**

On montre que si  $M \xrightarrow{R} N$  alors  $C[M] \xrightarrow{R} C[N]$ , par induction sur la structure de  $C[ ]$ , sachant que  $M \xrightarrow{R} N$ .

1.  $C[ ] = [ ]$  alors  $C[M] = M$  et  $C[N] = N$ , évident.
2.  $C[ ] = AD[ ]$ ,
  - par induction  $D[M] \xrightarrow{R} D[N]$ ,
  - d'autre part,  $C[M] = AD[M]$  et  $C[N] = AD[N]$ ,
  - donc par congruence à droite  $C[M] \xrightarrow{R} C[N]$ .
3.  $C[ ] = D[ ]A$ , comme 2 en changeant «droite» en «gauche».
4.  $C[ ] = \lambda x.D[ ]A$ , par induction  $D[M] \xrightarrow{R} D[N]$ , d'où la conclusion par  $(\xi)$ .

### 13.3 Stabilité par substitution

**Proposition**  $M \xrightarrow{R} N$  implique  $A[x := M] \xrightarrow{R} A[x := N]$ .

**Démonstration :**

L'hypothèse est  $M \xrightarrow{R} N$ . La démonstration se fait par induction sur  $A$ .

- $A \equiv x$ , alors  $A[x := M] \equiv M \xrightarrow{R} N \equiv A[x := N]$ .
- $A \equiv y$ , alors  $A[x := M] \equiv y \xrightarrow{R} y \equiv A[x := N]$ , par réflexivité.
- $A \equiv \lambda y.B$ ,
  - par induction  $B[x := M] \xrightarrow{R} B[x := N]$ ,
  - donc  $A[x := M] \equiv \lambda y.B[x := N]$  et  $A[x := N] \equiv \lambda y.B[x := N]$ ,
  - par congruence de  $\xrightarrow{R}$ , on a  $\lambda y.B[x := M] \xrightarrow{R} \lambda y.B[x := N]$ .

- $A \equiv BB'$   
 par induction  $B[x := M] \xrightarrow{R} B[x := N]$  et  $B'[x := M] \xrightarrow{R} B'[x := N]$ ,  
 par définition de la substitution  $A[x := M] \equiv B[x := M]B'[x := M]$   
 et  $A[x := N] \equiv B[x := N]B'[x := N]$ ,  
 par congruence de  $\xrightarrow{R}$  on a  $A[x := M] \xrightarrow{R} A[x := N]$ .

### 13.4 Exercice

Montrez que ça ne peut pas marcher pour  $\xrightarrow{R}$ , c'est à dire qu'on n'a pas :  
 $M \xrightarrow{R} N$  implique  $A[x := M] \xrightarrow{R} A[x := N]$ .

### 13.5 D'autres exemples de termes

$\omega \equiv \lambda x.xx$   
 $\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$   
 $Y \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$   $Y$  est appelé combinateur point fixe de Curry.  
 $W_F \equiv (\lambda x.F(xx))$

### 13.6 Exercices

1. Montrez que  $\Omega$  se réécrit vers un unique terme. Lequel? Plus précisément, montrez qu'il existe un terme unique  $M \in \Lambda$  tel que  $\Omega \xrightarrow{\beta} M$ .
2. Montrez que  $YF \xrightarrow{\beta} F(W_F W_F)$ .
3. Montrez que  $F(YF) \xrightarrow{\beta} F(W_F W_F)$ .
4. Conclure que  $YF \xleftrightarrow{\beta} F(YF)$ .

## 14 Redex et formes normales

### 14.1 Définitions

- Un R-redex est un terme  $M$  tel que  $(M, N) \in R$ .
- $N$  est le R-contracté de  $M$ .
- Un terme  $M$  est R-irréductible si  $M$  ne contient aucun R-redex.
- Un terme  $N$  est une forme normale de  $M$ , si  $N$  est R-irréductible et si  $M \xleftrightarrow{R} N$ .

### 14.2 Formes normales

On n'affirme

- ni l'existence (cf  $\Omega$ ),
- ni l'unicité, il y a unicité pour  $\beta$  et  $\beta \cup \eta_{exp}$ , mais il faut le prouver.

La forme normale si elle existe est la valeur intentionnelle.

### 14.3 Exercice

Lesquels de ces termes sont des formes normales?

$(\lambda x.x)$   
 $((\lambda xy.x)v)w$   
 $((\lambda xy.xv))w$   
 $(\lambda xy.x)vw$

## 15 Entiers de Church

### 15.1 Définition

- $(\lambda f x. f(fx)) \equiv \mathbf{2}$  correspond au nombre entier **deux**.
- $(\lambda f x. x) \equiv K$  correspond à **zéro**.
- $(\lambda f x. fx) \equiv \mathbf{1}$  correspond à **un**.
- Plus généralement l'entier **n** est le terme  $(\lambda f x. (f^n x))$ .

### 15.2 Exercices

1. Montrez que  $\mathbf{1} \xrightarrow[\eta]{} I$ .
2. Calculez
  - **12**,
  - **21**,
  - **22**,
3. A quoi correspond **mn**?