Introduction au lambda-calcul

1 Les fonctions comme citoyens de première classe

On peut faire que les preuves soient citoyens de première classe, mais pourquoi pas les fonctions ?

2 Quelques dates

autour de 1870 un Italien[1] s'oppose à Cantor sur le point de savoir quel est le concept de base des mathématiques prétendant que ça devrait être les fonctions.

1920 *Schönfinkel* initie la logique combinatoire,

1925 *Haskell Curry* crée la logique combinatoire,

1936 *Alonso Church* crée le λ-calcul,

1970-... Explosion du λ-calcul dûe à l'informatique (de Bruijn, Barendregt, Berry, Boehm, Girard, Klop, Krivine, Levy, Plotkin, Scott, mais aussi Curien, Statmann etc.)

3 Des notations différentes, un même concept

en maths	$x \mapsto x$	$f \mapsto (x \mapsto f(f(x)))$
en CAML	`fun x -> x`	`fun f -> (fun x -> (f (f x)))`
en λ-calcul	$\lambda x.x$	$\lambda f.(\lambda x.(f(fx)))$

4 La syntaxe

La classe Λ est la plus petite classe qui contient

1. x si x est une variable,
2. $\lambda x.M$ si $M \in \Lambda$,
3. (MN) si $M \in \Lambda$ et $N \in \Lambda$.

5 Qu'y a-t-il derrière la syntaxe ?

5.1 Signification des termes

On peut voir les termes comme des abstractions des fonctions ou des programmes fonctionnels.

Dans $\lambda x.M$, on dit que M est le corps de la fonction ou du programme.

Dans (MN), on peut voir M comme une fonction que l'on applique au paramètre N. La valeur va s'obtenir par «réduction» (approche intentionnelle).

Le lambda-calcul décrit les fonctions par leur comportement.

[1] dont j'ai oublié le nom.

5.2 L'anecdote derrière la syntaxe

Au début Church voulait écrire $\hat{\mathtt{x}}$.
Mais au temps des machines à écrire on ne savait écrire que `^x`.
Ce qui a donné $\Lambda\mathtt{x}$, puis $\lambda\mathtt{x}$.

6 Variables et substitutions

6.1 Les variables liées

$$\begin{aligned} BV(x) &= \emptyset \\ BV(\lambda x.M) &= BV(M) \cup \{x\} \\ BV(MN) &= BV(M) \cup BV(N) \end{aligned}$$

6.2 Exemples

$$\begin{aligned} BV(\lambda x.x) &= \{x\} \\ BV(\lambda f.(\lambda x.(f(fx)))) &= \{f, x\} \\ BV(\lambda f.(\lambda x.(f(fxy)y))) &= \{f, x\} \end{aligned}$$

6.3 Les variables libres

$$\begin{aligned} FV(x) &= \{x\} \\ FV(\lambda x.M) &= FV(M) - \{x\} \\ FV(MN) &= FV(M) \cup FV(N) \end{aligned}$$

6.4 Exemples

$$\begin{aligned} FV(\lambda x.x) &= \emptyset \\ FV(\lambda f.(\lambda x.(f(fx)))) &= \emptyset \\ FV(\lambda f.(\lambda x.(f(fxy)y))) &= \{y\} \\ FV(\lambda x.(f(fx))) &= \{f\} \end{aligned}$$

6.5 Les variables libres (suite)

Un terme qui n'a pas de variable libre est dit clos ou fermé ou est appelé un combinateur.

6.6 Les variables libres (suite)

Un terme qui n'a pas de variable libre est dit clos ou fermé ou est appelé un combinateur.

ATTENTION ! Une variable peut être à la fois libre et liée dans un terme.
Par exemple : $x(\lambda x.x)$.

7 Convention

1. Au lieu de $\lambda x_1(...(\lambda x_n.M)...)$, on écrit $\lambda x_1...x_n.M$.
   Par exemple : $\lambda fx.f(fx)$.
2. Au lieu de $(...(MN_1)...N_p)$, on écrit $MN_1...N_p$ ou $M\vec{N}$, si $\vec{N} = (N_1...N_p)$.
   Par exemple : $\lambda xyg.gxy$.

$((\lambda x.x)y)y)$ donne $(\lambda x.x)yy$

8 Le produit cartésien et la curryfication

Il n'y a pas de produit cartésien dans le λ-calcul simple.
Si on veut écrire :

$$\lambda(x, y).f(x, y)$$

on le remplace par

$$\lambda xy.fxy$$

C'est la curryfication (nommée après Haskell Curry).

9 Substitution

9.1 Substitution

Substituer une variable par un terme ne consiste pas simplement à remplacer toutes les occurrences de la variable par ce terme, à cause du phénomène de capture.

Quand on écrit $M[x := P]$ on ne remplace pas simplement les occurrences de x dans M par P.
Ainsi on a :

$$\begin{aligned} x(\lambda x.x)[x := y] &\neq y(\lambda x.y) \\ (\lambda y.x)[x := y] &\neq \lambda x.x \end{aligned}$$

donc il faut être prudent.

9.2 Substitution avec renommage

1. $x[x := P] = P$
2. $y[x := P] = y$
3. $(\lambda x.M)[x := P] = \lambda x.M$
4. $(\lambda y.M)[x := P] = \lambda y.(M[x := P])$
   si $x \notin FV(M)$ ou $y \notin FV(P)$
5. $(\lambda y.M)[x := P] = \lambda z.(M[y := z][x := P])$
   si $x \in FV(M)$ et $y \in FV(P)$
   et z est une nouvelle variable
6. $(M_1M_2)[x := P] = M_1[x := P]M_2[x := P]$

9.3 La convention de Barendregt

C'est une convention sur les variables libres d'un terme dans un énoncé mathématique.

Il n'existe aucun sous-terme dans lequel une variable apparaît à la fois libre et liée.

10 L'α-conversion

10.1 Définition

$$\lambda x.N \equiv_\alpha \lambda y.(N[x := y]) \qquad y \notin FV(N)$$

$$\frac{M_1 \equiv_\alpha N_1 \qquad M_2 \equiv_\alpha N_2}{M_1 M_2 \equiv_\alpha N_1 N_2}$$

$$\frac{M \equiv_\alpha N}{\lambda z.M \equiv_\alpha \lambda z.N}$$

$$x \equiv_\alpha x$$

L'α-conversion ne change pas la «signification» des termes.

10.2 Substitution et convention de Barendregt

La convention de Barendregt

- On suppose que dans tout théorème que l'on énonce, on suit la convention de Barendregt.
- Si l'on a un terme qui ne satisfait pas la convention de Barendregt, on s'y ramène par α-conversion

Avec la convention de Barendregt, la définition des substitutions devient beaucoup plus simple :

- $x[x := P] = P$
- $y[x := P] = y$
- $(\lambda y.M)[x := P] = \lambda y.M[x := P]$
- $(M_1 M_2)[x := P] = M_1[x := P] M_2[x := P]$

11 La β-réduction et les autres réductions

11.1 La règle β

Les fonctions sont faites pour calculer !
Les réductions d'un terme représentent son calcul.
La β-réduction est l'étape élémentaire.

$$(\lambda x.M)P \xrightarrow[\beta]{} M[x := P]$$

11.2 R-réduction

On se donne un ensemble R de règles, c-à-d de paires de termes, par exemple β.
$M \xrightarrow[R]{} N$ signifie que M se réduit à N par R en une étape.

$$\text{(règle)}\ \frac{(M,N) \in R}{M \xrightarrow[R]{} N} \qquad (\xi)\ \frac{M \xrightarrow[R]{} N}{\lambda x M \xrightarrow[R]{} \lambda x N}$$

$$\text{(congruence gauche)}\ \frac{M \xrightarrow[R]{} N}{MP \xrightarrow[R]{} NP} \qquad \text{(congruence droite)}\ \frac{M \xrightarrow[R]{} N}{PM \xrightarrow[R]{} PN}$$

11.3 Exercice

Réduire :
- $\lambda y.(\lambda x.x)z$
- $(\lambda fx.f(fx))(\lambda x.x)$
- $(\lambda fx.f(fx))(\lambda fx.fx)$

11.4 D'autres exemples de reductions

La réduction η : Pour tout $M \in \Lambda$ et $x \notin FV(M)$,

$$\lambda x.Mx \quad \xrightarrow[\eta]{} \quad M.$$

L'expansion η : Pour tout $M \in \Lambda$ et $x \notin FV(M)$,

$$M \quad \xrightarrow[\eta_{exp}]{} \quad \lambda x.Mx.$$

La réduction par β et η

$$\xrightarrow[\beta\eta]{} \;=\; \xrightarrow[\beta]{} \;\cup\; \xrightarrow[\eta]{} \;.$$

11.5 Fermeture transitive et réflexive

$$\text{(cas de base)}\ \frac{M \xrightarrow[R]{} N}{M \xrightarrow[R]{} N} \qquad \text{(réflexivité)}\ M \xrightarrow[R]{} M$$

$$\text{(transitivité)}\ \frac{M \xrightarrow[R]{} N \qquad N \xrightarrow[R]{} L}{M \xrightarrow[R]{} L}$$

Proposition **Congruence de** $\xrightarrow[\beta]{}$

$$\frac{M \xrightarrow[\beta]{} N}{\lambda x.M \xrightarrow[\beta]{} \lambda x.N}$$

$$\frac{M \xrightarrow[\beta]{} N \qquad P \xrightarrow[\beta]{} Q}{MP \xrightarrow[\beta]{} NQ}$$

Démonstration On fait une récurrence sur la longueur de l'arbre de preuve et on choisit de montrer la première inférence. Trois cas se présentent :

1. $M \xrightarrow[\beta]{} N$, on a utilisé le «cas de base», alors par (ξ), $\lambda x.M \xrightarrow[\beta]{} \lambda x.N$ et on conclut par le «cas de base».
2. $M \equiv N$, alors $\lambda x.M \equiv \lambda x.N$ et conclut par «réflexivité».
3. Il existe P tel que $M \xrightarrow[\beta]{} P$ et $P \xrightarrow[\beta]{} N$. Par induction, on tire,
   - $\lambda x.M \xrightarrow[\beta]{} \lambda x.P$
   - et $\lambda x.P \xrightarrow[\beta]{} \lambda x.N$,

   et par «transitivité» $\lambda x.M \xrightarrow[\beta]{} \lambda x.N$.

11.6 Fermeture transitive, réflexive et symétrique

Avec les règles

$$\text{(cas de base)}\ \frac{M \xrightarrow[R]{} N}{M \xleftrightarrow[R]{} N} \qquad \text{(réflexivité)}\ M \xleftrightarrow[R]{} M$$

$$\text{(transitivité)}\ \frac{M \xleftrightarrow[R]{} N \qquad N \xleftrightarrow[R]{} L}{M \xleftrightarrow[R]{} L} \qquad \text{(symétrie)}\ \frac{M \xleftrightarrow[R]{} N}{N \xleftrightarrow[R]{} M}$$

on obtient la fermeture transitive, réflexive et symétrique de $\xrightarrow[R]{}$.

- Elle s'écrit $=_R$ ou $\xleftrightarrow[R]{}$,
- Elle se dit R-égal ou R-convertible ou R-équivalent .

12 L'égalité extensionnelle

12.1 Définition

$\xleftrightarrow[\beta]{}$ décrit l'égalité intentionnelle, si $M \xleftrightarrow[\beta]{} N$ et si M et N ont le même «comportement» (c'est à dire même comportement pour la β-réduction.

Deux termes sont extensionnellement équivalent s'ils prennent le mêmes «valeurs» quand on les applique au même terme.

12.2 Règle

On a aussi la règle

$$\text{(ext)}\ \frac{Mx = Nx}{M = N} \qquad x \notin FV(MN)$$

Par les règles cas de base pour β + réflexivité + transitivité + symétrie + ext on définit une relation $\xleftrightarrow[\text{ext}]{}$.

Et on récupère la proposition : Proposition $\boxed{\xleftrightarrow[ext]{} \text{ est équivalent à } \xleftrightarrow[\beta\eta]{} .}$

Démonstration

- Pour montrer que $\xleftrightarrow[\beta\eta]{} \subseteq \xleftrightarrow[\text{ext}]{}$ il suffit de montrer que si $P \xrightarrow[\eta]{} Q$ alors $P \xleftrightarrow[\text{ext}]{} Q$
  donc il suffit de montrer que pour $x \notin FV(M)$ $(\lambda x.Mx) \xleftrightarrow[\text{ext}]{} M$
  En fait, il suffit de montrer qu'on a $(\lambda x.Mx)x \xleftrightarrow[\beta]{} Mx$.
  Par le *cas de base* et la définition de $\xrightarrow[\beta]{}$, cela vient de $(\lambda x.Mx)x \xrightarrow[\beta]{} (Mx)[x := x] \equiv Mx$.
- Pour montrer que $\xleftrightarrow[\text{ext}]{} \subseteq \xleftrightarrow[\beta\eta]{}$,, il suffit de montrer que ext est une règle dérivée dans $\xleftrightarrow[\beta\eta]{}$.
  Supposons $Mx \xleftrightarrow[\beta\eta]{} Nx$ avec $x \notin FV(MN)$, alors $\lambda x.Mx \xleftrightarrow[\beta\eta]{} \lambda x.Nx$ par ξ, donc par η appliquée deux fois, on a :

  $M \xleftarrow[\eta]{} \lambda x.Mx \xleftrightarrow[\beta\eta]{} \lambda x.Nx \xrightarrow[\eta]{} N$, soit $M \xleftrightarrow[\beta\eta]{} N$.

13 Contexte

Un contexte $C[\,]$ est défini ainsi

1. $[\,]$ est un contexte,
2. si $M \in \Lambda$ et si $C[\,]$ est un contexte alors $MC[\,]$ et $C[\,]M$ sont des contextes,
3. si $C[\,]$ est un contexte alors $\lambda x.C[\,]$ est un contexte.

13.1 Définition

Si $C[\,]$ est un contexte et $A \in \Lambda$ alors $C[A]$ est défini par induction sur $C[\,]$:

- $[A] = A$,
- si $C[\,] = \lambda D[\,]$ alors $C[A] = \lambda D[A]$,
- si $C[\,] = M D[\,]$ alors $C[A] = M D[A]$,
- etc.

13.2 Stabilité par contexte

Proposition $\xrightarrow[R]{}$, $\xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow$ et $\xleftrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow$ sont stables par contexte ou compatibles.

$\xrightarrow[R]{}$ est stable par contexte.

Démonstration :

On montre que si$M \xrightarrow[R]{} N$ alors $C[M] \xrightarrow[R]{} C[N]$, par induction sur la structure de $C[\,]$, sachant que $M \xrightarrow[R]{} N$.

1. $C[\,] = [\,]$ alors $C[M] = M$ et $C[N] = N$, évident.
2. $C[\,] = AD[\,]$,
   - par induction $D[M] \xrightarrow[R]{} D[N]$,
   - d'autre part, $C[M] = AD[M]$ et $C[N] = AD[N]$,
   - donc par congruence à droite $C[M] \xrightarrow[R]{} C[N]$.
3. $C[\,] = D[\,]A$, comme 2 en changeant «droite» en «gauche».
4. $C[\,] = \lambda x.D[\,]A$, par induction $D[M] \xrightarrow[R]{} D[N]$, d'où la conclusion par (ξ).

13.3 Stabilité par substitution

Proposition $M \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow N$ implique $A[x := M] \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow A[x := N]$.

Démonstration :

L'hypothèse est $M \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow N$. La démonstration se fait par induction sur A.

- $A \equiv x$, alors $A[x := M] \equiv M \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow N \equiv A[x := M]$.
- $A \equiv y$, alors $A[x := M] \equiv y \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow y \equiv A[x := M]$, par réflexivité.
- $A \equiv \lambda y.B$,
  par induction $B[x := M] \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow B[x := N]$,
  donc $A[x := M] \equiv \lambda y.B[x := N]$ et $A[x := N] \equiv \lambda y.B[x := N]$,
  par congruence de $\xrightarrow[R]{}$, on a $\lambda y.B[x := M] \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow \lambda y.B[x := N]$.

– $A \equiv BB'$
par induction $B[x := M] \xrightarrow[R]{} B[x := N]$ et $B'[x := M] \xrightarrow[R]{} B'[x := N]$,
par définition de la substitution $A[x := M] \equiv B[x := M]B'[x := M]$
et $A[x := N] \equiv B[x := N]B'[x := N]$,
par congruence de $\xrightarrow[R]{}$ on a $A[x := M] \xrightarrow[R]{} A[x := N]$.

13.4 Exercice

Montrez que ça ne peut pas marcher pour $\xrightarrow[R]{}$,c'est à dire qu'on n'a pas :
$M \xrightarrow[R]{} N$ implique $A[x := M] \xrightarrow[R]{} A[x := N]$.

13.5 D'autres exemples de termes

$\omega \equiv \lambda x.xx$
$\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
$\mathsf{Y} \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ Y est appelé combinateur point fixe de Curry.
$\mathsf{W}_F \equiv (\lambda x.F(xx))$

13.6 Exercices

1. Montrez que Ω se réécrit vers un unique terme. Lequel ? Plus précisément, montrez qu'il existe un terme unique $M \in \Lambda$ tel que $\Omega \xrightarrow[\beta]{} M$.
2. Montrez que $\mathsf{Y}F \xrightarrow[\beta]{} F(\mathsf{W}_F\mathsf{W}_F)$.
3. Montrez que $F(\mathsf{Y}F) \xrightarrow[\beta]{} F(\mathsf{W}_F\mathsf{W}_F)$.
4. Conclure que $\mathsf{Y}F \xleftrightarrow[\beta]{} F(\mathsf{Y}F)$.

14 Redex et formes normales

14.1 Définitions

– Un R-redex est un terme M tel que $(M, N) \in R$.
– N et le R-contracté de M.
– Un terme M est R-irreductible si M ne contient aucun R-redex.
– Un terme N est une forme normale de M, si N est R-irréductible et si $M \xleftrightarrow[R]{} N$.

14.2 Formes normales

On n'affirme
– ni l'existence (cf Ω),
– ni l'unicité, il y a unicité pour β et $\beta \cup \eta_{exp}$, mais il faut le prouver.
La forme normale si elle existe est la valeur intentionnelle.

14.3 Exercice

Lesquels de ces termes sont des formes normales ?
$(\lambda x.x)$
$((\lambda xy.x)v)w$
$((\lambda xy.xv))w$
$(\lambda xy.x)vw$

15 Entiers de Church

15.1 Définition

- $(\lambda fx.f(fx)) \equiv \mathbf{2}$ correspond au nombre entier deux.
- $(\lambda fx.x) \equiv K$ correspond à zéro.
- $(\lambda fx.fx) \equiv \mathbf{1}$ correspond à un.
- Plus généralement l'entier **n** est le terme $(\lambda fx.(f^n x))$.

15.2 Exercices

1. Montrez que $\mathbf{1} \xrightarrow[\eta]{} I$.
2. Calculez
   - **12**,
   - **21**,
   - **22**,
3. A quoi correspond **mn** ?