

Logique Propositionnelle

1 Dédution naturelle

En **dédution naturelle**, on raisonne avec des hypothèses.

Au lieu du jugement $\vdash p$, on utilise le jugement $\Gamma \vdash p$ où

- Γ est un **ensemble de propositions** qui sont les hypothèses ou **antécédent**.
- On écrit $\Gamma, p \vdash q$ au lieu de $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$
et $\vdash p$ quand l'ensemble des hypothèses est vide.
- $\Gamma \vdash p$ se lit
 - “**de Γ on déduit p** ”
 - ou “ **Γ infère p** ”
 - ou “**sous les hypothèses Γ on a p** ”.

2 Les théorèmes

Les théorèmes sont les jugements de la forme $\vdash p$ qui peuvent être déduits des axiomes et des règles. On les trouvent donc à la **racine** d'un arbre de preuve.

3 Logique propositionnelle minimale

3.1 L'axiome de la logique propositionnelle minimale

Il n'y a qu'un seul axiome,

$$\Gamma, p \vdash p$$

3.2 Les règles de la logique propositionnelle minimale

Il y a deux règles : **introduction** et **élimination** :

$$\Rightarrow I \quad \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \Rightarrow q}$$

$$\Rightarrow E \quad \frac{\Gamma \vdash p \Rightarrow q \quad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

3.3 Preuve de K

$$\Rightarrow E \quad \frac{\Rightarrow E \quad \frac{p, q \vdash p}{p \vdash q \Rightarrow p}}{\vdash p \Rightarrow q \Rightarrow p}$$

3.4 Exercice

1. Prouver *Hilbert_S*.
2. Prouver $B : (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q$.

4 La logique propositionnelle

4.1 Les règles

Les règles sont deux types :

- **règles d'introduction** : un connecteur qui n'était pas présent apparaît dans la proposition conséquente sous la barre d'inférence.
- **règles d'élimination** : la proposition conséquente sous la barre d'inférence est construite en enlevant le connecteur principal d'un des connecteurs conséquents d'un jugement au dessus de la barre.

4.2 La syntaxe

Il y a trois nouveaux connecteurs \perp , $\&$ et \vee .

- \perp est unaire et représente l'absurde,
- $\&$ et \vee sont bien connus et représentent la conjonction et la disjonction.

4.3 L'axiome pour \perp

Il n'y a qu'une règle et c'est **une règle d'élimination** :

$$\perp E \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash p}$$

4.4 Les règles du $\&$

Il y a **une règle d'introduction** et **deux règles d'élimination**.

$$\&I \frac{\Gamma \vdash p \quad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \& q}$$

$$\&E_g \frac{\Gamma \vdash p \& q}{\Gamma \vdash p}$$

$$\&E_d \frac{\Gamma \vdash p \& q}{\Gamma \vdash q}$$

4.5 Les règles du \vee

Il y a **deux règles d'introduction** et **une règle d'élimination**.

$$\vee I_g \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

$$\vee I_d \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

$$\vee E \frac{\Gamma \vdash p \vee q \quad \Gamma, p \vdash r \quad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma \vdash r}$$