Eléments de réponse au DM1 de logique

Ici ne sont mises que les corrections (ou les versions différentes) notoires quant à ma version.

1 Bornes supérieures

RAS

2 Fermetures transitives

RAS

3 Ordres bien fondés

Ma solution de la question 4 me paraît meilleure car constructive, même si ce n'est pas la solution retenue par le prof. Ceci dit, je vous soumet cette correction (grâce à Victor Poupet qui avait rédigé cette question de la même manière).

Soient R et T deux relations noethériennes respectivement sur E et F. Montrons que toute partie non-vide de $E \times F$ admet un élément minimal pour la relation $(R \times T)^+$. On en déduira donc à l'aide de la question 1. que la relation $R \times T$ est noethérienne.

Pour celà, nous allons utiliser le fait que $(R \times T)^+ = R^+ \times T^+$. Montrons ce résultat à l'aide d'une double inclusion.

- Il est immédiat que $R \times T \subseteq R^+ \times T^+$. De plus $R^+ \times T^+$ est transitive (d'après le résultat de la question 2.) donc il en résulte par définition de $(R \times T)^+$ que $(R \times T)^+ \subseteq R^+ \times T^+$.
- Supposons $(x, y)\ R^+ \times T^+\ (x', y')$. Alors $x\ R^+\ x'$ ou ($x = x'$ et $y\ T^+\ y'$). Si l'on est dans le premier cas, il existe une suite finie $(x_i)_{i \in \{0,\dots,n\}}$ telle que $x_0 = x$, $x_n = x'$ et $\forall i \in \{0, ..., n-1\}, x_i\ R\ x_{i+1}$ donc en construisant la suite $((x_i, y_i))_{i \in \{0,\dots,n\}}$ par $\forall i \in \{0, ..., n-1\}, y_i = y$ et $y_n = y'$ on a de manière évidente $(x_i, y_i)\ R \times T\ (x_{i+1}, y_{i+1})$ pour tout $i < n$ donc finalement $(x, y)\ (R \times T)^+\ (x', y')$. Si par contre l'on est dans le second cas, on effectue une construction analogue à l'aide de la chaîne reliant y et y' par la relation T et l'on considère les couples $(x, y_i)_{i \in \{0,\dots,n\}}$ puisque $x = x'$. On montre donc que $R^+ \times T^+ \subseteq (R \times T)^+$ ce qui achève la preuve de l'égalité.

Soit A une partie non-vide de $E \times F$. Alors en posant $A_E = \{x \in E, \exists y \in F, (x, y) \in A\}$ on sait que A_E est non-vide et admet donc un élément minimal pour la relation R^+ (puisque R est noethérienne). Soit x_0 un tel élément. Considérons maintenant la partie de F définie par $A_F = \{y \in F, (x_0, y) \in A\}$. Cette partie est non vide (sinon x_0 ne serait pas dans A_E) donc elle admet un élement minimal pour la relation T^+. Notons y_0 un tel élément. Montrons maintenant par l'absurde que (x_0, y_0) est un élément minimal de A pour la relation $(R \times T)^+$. Supposons qu'il existe un couple $(x, y) \in A$ tel que $(x, y)\ (R \times T)^+\ (x_0, y_0)$. Alors d'après le résultat montré précédement, l'on a $(x, y)\ R^+ \times T^+\ (x_0, y_0)$. Donc $x\ R^+\ x_0$ ou $x = x_0$ et $y\ T^+ y_0$ ce qui, dans les deux cas contredit le fait que x_0 et y_0 sont minimaux (par construction), d'où le résultat. On a donc bien montré que le produit lexicographique de deux relations noethérienne est une relation noethérienne.

4 Fonctions convexes

L'induction attendue était en fait $P(2^p) \to P(2^{p+1})$ et $P(n+1) \to P(n)$, cette dernière implication obtenue plus facilement mais de la même manière que moi.

Ensuite, la rédaction de l'équivalence des deux implications est la même (mais tout de même plus simple).