

Magistère d'Informatique et Modélisation

Devoir de logique : *induction et ordres*

Pour le 12 Octobre 2000

Laure Danthony, Sylvain Four

1 Bornes supérieures

1. La borne supérieure d'une partie X est s'il existe, le plus petit des majorants.
 - Pour \emptyset , tout élément de E est majorant. La borne supérieure de \emptyset est donc, s'il existe, le plus petit élément de E .
 - On cherche un élément plus grand que tout les autres. La borne supérieure de E est donc, s'il existe, le plus grand élément de E .
2. – Une condition *suffisante* d'existence pour la borne supérieure de l'ensemble vide est que l'ensemble E soit *bien ordonné* : toute partie non vide de E (entre autres E) admet un plus petit élément. Cependant, cette condition n'est pas *nécessaire* : on peut par exemple considérer l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$ muni de la relation

$$R = \{(a, b); (a, c); (b, d); (c, d)\}^+ = \{(a, b); (a, c); (b, d); (c, d); (a, d)\}.$$

E a un plus petit élément d sans être bien ordonné : $\{a, b, c\}$ n'a pas de plus petit élément car b et c ne sont pas en relation.

- Pour la borne supérieure de E , là encore une CNS est l'existence d'un élément maximum.

2 Fermeture transitive

1. – Supposons R transitive. Supposons x et y vérifiant $xRRy$. Par définition, il existe z vérifiant xRz et zRy . Par transitivité de R , on obtient immédiatement xRy donc $RR \subseteq R$.
 - Réciproquement, supposons $RR \subseteq R$. Supposons xRy et yRz . On a donc $xRRz$, donc par hypothèse xRz , d'où la transitivité de R .
2. – Montrons d'abord (ce qui ne va pas de soi...) l'existence d'une plus petite relation transitive contenant R . Tout d'abord, la relation triviale $E \times E$ vérifiée par tous les couples est transitive et contient R . On peut donc considérer l'intersection \mathcal{T} de toutes les relations transitives contenant R : il s'agit bien d'une relation transitive (simple jeu d'écriture) contenant R , mais contenue dans toute autre relation transitive contenant R (puisque c'est leur intersection!). D'où l'existence de la fermeture transitive.

- Notons $\mathcal{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. Montrons l'égalité $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.
 - Montrons $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Par définition de \mathcal{T} , il suffit de vérifier que \mathcal{S} contient R (immédiat d'après sa définition) et est transitive. Supposons $xSySz$. Il existe alors n_1 et n_2 tels que $xR^{n_1}y$ et $yR^{n_2}z$. On a alors $xR^{n_1+n_2}z$, puis xSz ; cqfd.
 - Montrons l'inclusion inverse. Par définition de \mathcal{T} , $R \subset \mathcal{T}$. Ensuite, montrons $R^2 \subset \mathcal{T}$. Supposons donc xR^2y . Par définition de R^2 , on a l'existence de z tel que xRz et zRy . Or comme $R \subset \mathcal{T}$, on obtient xTz et zTy puis xTy par transitivité de \mathcal{T} . De même (récurrence), on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R^n \subset \mathcal{T}$. Par conséquent, on a bien $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subset \mathcal{T}$.

3 Ordre bien fondé

Remarques préliminaires :

1. Avec la définition de l'énoncé, et en prenant l'ensemble ordonné (\mathbb{N}, \leq) (loi usuelle), la suite constante égale à 1515 est strictement décroissante. On imagine donc que par "suite strictement décroissante" pour une loi R , on entend : pour tout $i > j$, $x_i R x_j$ et $x_i \neq x_j$.
 2. Pour régler ces problèmes de "stricte ou large", lorsque une loi $<$ est donnée sans hypothèse de réflexivité, on notera donc \leq pour " $<$ ou $=$ ", et \lesssim pour " $<$ et \neq ".
 3. On imagine que par " m minimal dans X ", on entend qu'il n'existe pas $x \in X$ tel que $x \lesssim m$ (ce qui ne signifie pas que $meqx$ pour tout $x \in X \dots$).
 4. Enfin, dans la définition du produit lexicographique, par " $x_1 R x_2$ ou $(x_1 = x_2$ et $y_1 T y_2)$ ", on a compris : " $(x_1 R x_2$ et $x_1 \neq x_2)$ ou $(x_1 = x_2$ et $y_1 T y_2)$ ". Sans quoi, si on munit \mathbb{N} de la relation usuelle \leq (qui est bien un préordre), on a $(8, 10) \leq (8, 7)$, puisque " $8 \leq 8$ ou $(8 = 8$ et $10 < 7)$ " est vérifiée...
1. - Supposons $(E, <)$ noethérien, et imaginons l'existence de P une partie non vide de E n'admettant pas d'élément minimal. Fixons un élément $x_0 \in P$. Il n'est pas minimal pour $<^+$, donc il existe $x_1 \in P$ tel que $x_1 \lesssim^+ x_0$, ce qui signifie qu'on peut trouver des $\alpha_{1,i} \in E$ tels que :

$$x_1 \lesssim \alpha_{1,1} \lesssim \alpha_{1,2} \lesssim \dots \lesssim \alpha_{1,n_1} \lesssim x_0.$$

On peut refaire le même travail depuis x_1 (qui n'est pas minimal) : il existe $x_2 \in P$ tel que $x_2 \lesssim^+ x_1$, ce qui signifie qu'on peut trouver des $\alpha_{2,i} \in E$ tels que :

$$x_2 \lesssim \alpha_{2,1} \lesssim \dots \lesssim \alpha_{2,n_2} \lesssim x_1 \lesssim \alpha_{1,1} \lesssim \alpha_{1,2} \lesssim \dots \lesssim \alpha_{1,n_1} \lesssim x_0.$$

En continuant ainsi, on construit par récurrence une suite strictement décroissante pour $<$, niant ainsi son caractère noethérien.

- Supposons maintenant que toute partie non vide de E admette un plus petit élément pour $<^+$, et montrons que $<$ est noethérienne. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante, et notons X l'ensemble de ses valeurs. Cette partie non vide de E contient donc un élément minimal, disons x_{n_0} , pour $<^+$. Déjà, $x_{n_0+1} \leq x_{n_0}$. Maintenant, si l'inégalité était stricte, on aurait a fortiori $x_{n_0+1} \stackrel{+}{<} x_{n_0}$, contredisant le caractère minimal de x_{n_0} dans E pour $<^+$.

Ainsi, $x_{n_0+1} = x_{n_0}$, puis par récurrence immédiate (raisonnement similaire), $x_{n_0+p} = x_{n_0}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$: la suite est donc stationnaire, et $(E, <)$ est bien noethérien.

2. On admet (provisoirement) que $(\mathbb{N}^2, \leq_{lex})$ est noethérien. L'élément $(1515, 0)$ possède une infinité de minorants, par exemple tous les couples $(1024, n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Prenons R et T deux préordres. Montrons que $R \times T$ est un préordre. Supposons donc $(x_1, y_1)R \times T(x_2, y_2)$ et $(x_1, y_1)R \times T(x_2, y_2)$. On a quatre possibilités:

- x_1Rx_2 et x_2Rx_3 d'où par transitivité de R , x_1Rx_3 d'où $(x_1, y_1)R \times T(x_3, y_3)$
- x_1Rx_2 et $x_2 = x_3$ et y_2Ty_3 d'où x_1Rx_3 et donc $(x_1, y_1)R \times T(x_3, y_3)$
- $x_1 = x_2$ et y_1Ty_2 et x_2Rx_3 d'où x_1Rx_3 et donc $(x_1, y_1)R \times T(x_3, y_3)$
- $x_1 = x_2 = x_3$ et $y_1Ty_2Ty_3$ d'où, par transitivité de T : $(x_1, y_1)R \times T(x_3, y_3)$.

4. Prenons R et T deux relations noethériennes. Montrons par l'absurde que $R \times T$ est une relation noethérienne. Soit $(x_i, y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante, c'est à dire

$$\dots (R \times T)(x_3, y_3)(R \times T)(x_2, y_2)(R \times T)(x_1, y_1),$$

chaque couple (x_i, y_i) étant distinct des autres. Alors :

- il existe $i_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{i_1}R_{strict}x_1$. En effet, si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ était constante, alors cela imposerait à la suite $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'être strictement décroissante, ce qui est impossible car T est une relation noethérienne.
- de même, il existe $i_2 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{i_2}R_{strict}x_{i_1}$. En effet, si $(x_i)_{i \leq i_1}$ était constante, alors cela imposerait à la suite $(y_i)_{i \leq i_1}$ d'être strictement décroissante, ce qui est impossible car T est une relation noethérienne.
- ...

Ainsi, on construit une suite $(x_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ qui est strictement décroissante, ce qui est contradictoire avec le fait que R soit une relation noethérienne. Donc: il n'existe pas de suite strictement décroissante pour $R \times T$. $R \times T$ est donc noethérien.

5.
 - (\mathbb{N}, \leq) (ordre usuel)
 - $(\mathbb{N}^2, \leq_{lex})$ (ordre lexicographique) (cf 4.)

- de même, par récurrence sur $k : (\mathbb{N}^k, \leq_{lex})$
- Par contre, si $A = \{a, b\}$ est muni du préordre $\leq = \{(a, b)\}$, on munit naturellement A^* du préordre lexicographique \leq_{lex} associé. Après avoir essayé de montrer que ce préordre était noëthérien, la suite strictement décroissante suivante permet d'affirmer le contraire :

$$\dots <_{lex} aab = x_3 <_{lex} aab = x_2 <_{lex} ab = x_1 <_{lex} b = x_0.$$

4 Fonctions convexes

1. Bien entendu, on supposera dans cette question f convexe...

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $T(n)$ la propriété suivante :

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

- On va commencer par prouver la propriété $T(n)$ lorsque n est une puissance de 2. Plus précisément, pour $p \in \mathbb{N}$, notons $H(p)$ la proposition $T(2^{p+1})$.
 - $H(0)$ vient de la définition de f convexe.
 - Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $H(p)$ est vérifiée. On va montrer $H(p+1)$, en commençant par fixer $x_1, \dots, x_{2^{p+2}} \in \mathbb{R}$. On va commencer par poser

$$y_1 = \frac{x_1 + \dots + x_{2^{p+1}}}{2^{p+1}}$$

et

$$y_2 = \frac{x_{2^{p+1}+1} + \dots + x_{2^{p+2}}}{2^{p+1}}.$$

On peut alors appliquer la définition de la convexité, qui nous fournit

$$f\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \leq \frac{f(y_1) + f(y_2)}{2}$$

soit encore :

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{p+2}}}{2^{p+2}}\right) \leq \frac{f(y_1) + f(y_2)}{2},$$

puis en utilisant $H(p)$, c'est-à-dire $T(2^{p+1})$ pour $f(y_1)$ et $f(y_2)$:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{p+2}}}{2^{p+2}}\right) \leq \frac{f(y_1) + f(y_2)}{2}$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{p+2}}}{2^{p+2}}\right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{f(x_1) + \dots + f(x_{2^{p+1}})}{2^{p+1}} + \frac{f(x_{2^{p+1}+1}) + \dots + f(x_{2^{p+2}})}{2^{p+1}} \right)$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{p+2}}}{2^{p+2}}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_{2^{p+2}})}{2^{p+2}}.$$

Ceci étant vrai pour tout $x_1, \dots, x_{2^{p+2}}$, on a bien établi $H(p+1)$.

Ainsi, $H(p) \Rightarrow H(p+1)$.

Puisque p était fixé quelconque, on vient de montrer :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad H(p) \Rightarrow H(p+1).$$

Ainsi, on a $H(0)$ et $\forall p \in \mathbb{N}, H(p) \Rightarrow H(p+1)$, ce qui nous permet d'affirmer grâce au principe Ind_C ("modifié") appliqué à H , que $H(p)$ est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$.

- Soit maintenant n quelconque. Montrons $T(n)$ (il n'y a plus d'induction de la forme Ind_C). Si n est de la forme 2^p , il n'y a rien à faire. Sinon, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n < 2^p$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Notons $m = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, et définissons, pour $k \in \llbracket n+1, 2^p \rrbracket$, $x_k = m$. Grâce à $T(2^p)$, on peut écrire :

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n + (2^p - n)m}{2^p}\right) \leq \frac{1}{2^p}(f(x_1) + \dots + f(x_n) + (2^p - n)f(m)),$$

or $x_1 + \dots + x_n = nm$, de sorte que $\frac{x_1 + \dots + x_n + (2^p - n)m}{2^p} = m$, et ainsi :

$$2^p f(m) \leq f(x_1) + \dots + f(x_n) + (2^p - n)f(m),$$

et on en déduit sans trop de mal :

$$f(m) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n)).$$

2. Le principe d'induction utilisé consiste à parcourir tous les entiers, mais pas dans l'ordre habituel :

$$\left(\mathcal{P}(1) \wedge (\forall p \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(2^p) \Rightarrow \mathcal{P}(2^{p+1})) \wedge (\forall p, \mathcal{P}(2^p) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^p, \mathcal{P}(n)))\right) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k))$$

Dans la suite, nous appellerons Ind_{New} cette nouvelle induction.

3. Montrons maintenant que cette induction est équivalente à la suivante : (Ind_C)

$$\left(\mathcal{P}(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))\right) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k))$$

- Montrons tout d'abord $Ind_C \Rightarrow Ind_{New}$: Soit \mathcal{P} une propriété vérifiant :

$$\mathcal{P}(1) \wedge (\forall p \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(2^p) \Rightarrow \mathcal{P}(2^{p+1})) \wedge (\forall p, \mathcal{P}(2^p) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^p, \mathcal{P}(n)))$$

soit encore :

$$\mathcal{P}(1) \wedge (\forall p \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(2^p)) \Rightarrow (\mathcal{P}(2^{p+1}) \wedge (\forall n < 2^p, \mathcal{P}(n)))$$

Alors, en notant $\mathcal{H}(p)$ la propriété

$$\left(\mathcal{P}(2^p) \wedge (\forall n < 2^p, \mathcal{P}(n))\right)$$

Elle vérifie $\mathcal{H}(1)$ et comme par hypothèse :

$$\mathcal{P}(2^{p+1}) \wedge (\forall n < 2^p, \mathcal{P}(n)) \Rightarrow \mathcal{P}(2^{p+2}) \Rightarrow (\forall n < 2^{p+1}, \mathcal{P}(n))$$

Alors $\mathcal{H}(p) \Rightarrow \mathcal{H}(p+1)$ et en appliquant Ind_C à \mathcal{H} , on récupère $\forall k, \mathcal{H}(k)$ donc $\forall k, \mathcal{P}(k)$.

- Montrons maintenant $Ind_C \Rightarrow Ind_{new}$: Soit \mathcal{P} une propriété vérifiant :

$$\mathcal{P}(1) \wedge (\forall n, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$$

- Montrons que $\forall p, \mathcal{P}(2^p) \Rightarrow \mathcal{P}(2^{p+1})$: Trivialement:

$$\mathcal{P}(2^p) \Rightarrow \mathcal{P}(2^p + 1) \Rightarrow \dots \Rightarrow \mathcal{P}(2^{p+1})$$

- Montrons que $\forall p, \mathcal{P}(2^p) \Rightarrow (\forall n < 2^p, \mathcal{P}(n))$ (par l'absurde).
Supposons l'existence d'un $n < 2^p$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est faux. Alors l'ensemble $\{k \leq 2^p, \mathcal{P}(k) \text{ faux}\}$ est non vide, soit donc k_0 son P.P.E. $k_0 = 2^p$ est impossible donc $2^{p-1} < k_0 < 2^p$ Or $\mathcal{P}(2^p)$ est vraie donc aussi $\mathcal{P}(2^p + 1)$ et par suite $\mathcal{P}(k_0)$ aussi ce qui est absurde.

Donc finalement, les hypothèses de Ind_{new} sont vérifiées, donc $\forall k, \mathcal{P}(k)$ et l'implication demandée.

On a donc l'équivalence: $Ind_C \Leftrightarrow Ind_{new}$.