Magistère d'Informatique et Modélisation

Devoir de logique : *induction et ordres*

Pour le 12 Octobre 2000

Laure Danthony, Sylvain Four

1 Bornes supérieures

1. La borne supérieure d'une partie X est s'il existe, le plus petit des majorants.
   - Pour $\emptyset$, tout élément de E est majorant. La borne supérieure de $\emptyset$ est donc, s'il existe, le plus petit élément de E.
   - On cherche un élément plus grand que tout les autres. La borne supérieure de E est donc, s'il existe, le plus grand élément de E.
2. - Une condition *suffisante* d'existence pour la borne supérieure de l'ensemble vide est que l'ensemble E soit *bien ordonné* : toute partie non vide de E (entre autres E) admet un plus petit élément. Cependant, cette condition n'est pas *nécessaire* : on peut par exemple considérer l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$ muni de la relation

     $$R = \{(a, b); (a, c); (b, d); (c; d)\}^+ = \{(a, b); (a, c); (b, d); (c; d); (a, d)\}.$$

     E a un plus petit élément d sans être bien ordonné : $\{a, b, c\}$ n'a pas de plus petit élément car b et c ne sont pas en relation.
   - Pour la borne supérieure de E, là encore une CNS est l'existence d'un élément maximum.

2 Fermeture transitive

1. - Supposons R transitive. Supposons x et y vérifiant $xRRy$. Par définition, il existe z vérifiant xRz et zRy. Par transitivité de R, on obtient immédiatement xRy donc $RR \subseteq R$.
   - Réciproquement, supposons $RR \subseteq R$. Supposons xRy et yRz. On a donc $xRRz$, donc par hypothèse xRz, d'où la transitivité de R.
2. - Montrons d'abord (ce qui ne va pas de soi...) l'existence d'une plus petite relation transitive contenant R. Tout d'abord, la relation triviale $E \times E$ vérifiée par tous les couples est transitive et contient R. On peut donc considérer l'intersection $\mathcal{T}$ de toutes les relations transitives contenant R : il s'agit bien d'une relation transitive (simple jeu d'écriture) contenant R, mais contenue dans toute autre relation transitive contenant R (puisque c'est leur intersection !). D'où l'existence de la fermeture transitive.

– Notons $\mathcal{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. Montrons l'égalité $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.

  – Montrons $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Par définition de $\mathcal{T}$, il suffit de vérifier que S contient R (immédiat d'après sa définition) et est transitive. Supposons $xSySz$. Il existe alors n_1 et n_2 tels que $xR^{n_1}y$ et $yR^{n_2}z$. On a alors $xR^{n_1+n_2}z$, puis $x\mathcal{S}z$; cqfd.

  – Montrons l'inclusion inverse. Par définition de $\mathcal{T}$, $R \subset \mathcal{T}$. Ensuite, montrons $R^2 \subset \mathcal{T}$. Supposons donc xR^2y. Par définition de R^2, on a l'existence de z tel que xRz et zRy. Or comme $R \subset \mathcal{T}$, on obtient xTz et zTy puis xTy par transitivité de $\mathcal{T}$. De même (récurrence), on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R^n \subset \mathcal{T}$.

    Par conséquent, on a bien $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subset \mathcal{T}$.

3 Ordre bien fondé

Remarques préliminaires :

1. Avec la définition de l'énoncé, et en prenant l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$ (loi usuelle), la suite constante égale à 1515 est strictement décroissante. On imagine donc que par "suite strictement décroissante" pour une loi R, on entend : pour tout $i > j$, $x_i R x_j$ et $x_i \neq x_j$.

2. Pour régler ces problèmes de "stricte ou large", lorsque une loi $<$ est donnée sans hypothèse de réflexivité, on notera donc $\leq$ pour "$<$ ou $=$", et $\lneqq$ pour "$<$ et $\neq$".

3. On imagine que par "m minimal dans X", on entend qu'il n'existe pas $x \in X$ tel que $x \lneqq m$ (ce qui ne signifie pas que meqx pour tout $x \in X \ldots$).

4. Enfin, dans la définition du produit lexicographique, par "$x_1 R x_2$ ou $(x_1 = x_2$ et $y_1 T y_2)$, on a compris : "$(x_1 R x_2$ et $x_1 \neq x_2)$ ou $(x_1 = x_2$ et $y_1 T y_2)$. Sans quoi, si on munit $\mathbb{N}$ de la relation usuelle $\leq$ (qui est bien un préordre), on a $(8, 10) \leq (8, 7)$, puisque "$8 \leq 8$ ou $(8 = 8$ et $10 < 7)$" est vérifiée...

1. – Supposons $(E, <)$ nœthérien, et imaginons l'existence de P une partie non vide de E n'admettant pas d'élément minimal. Fixons un élément $x_0 \in P$. Il n'est pas minimal pour $<^+$, donc il existe $x_1 \in P$ tel que $x_1 \lneqq^+ x_0$, ce qui signifie qu'on peut trouver des $\alpha_{1,i} \in E$ tels que :

$$x_1 \lneqq \alpha_{1,1} \lneqq \alpha_{1,2} \lneqq \cdots \lneqq \alpha_{1,n_1} \lneqq x_0.$$

On peut refaire le même travail depuis x_1 (qui n'est pas minimal) : il existe $x_2 \in P$ tel que $x_2 \lneqq^+ x_1$, ce qui signifie qu'on peut trouver des $\alpha_{2,i} \in E$ tels que :

$$x_2 \lneqq \alpha_{2,1} \lneqq \cdots \lneqq \alpha_{2,n_2} \lneqq x_1 \lneqq \alpha_{1,1} \lneqq \alpha_{1,2} \lneqq \cdots \lneqq \alpha_{1,n_1} \lneqq x_0.$$

En continuant ainsi, on construit par récurrence une suite strictement décroissante pour $<$, niant ainsi son caractère nœthérien.

– Supposons maintenant que tout partie non vide de E admette un plus petit élément pour $<^+$, et montrons que $<$ est nœthérienne. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante, et notons X l'ensemble de ses valeurs. Cette partie non vide de E contient donc un élément minimal, disons x_{n_0}, pour $<^+$. Déjà, $x_{n_0+1} \leq x_{n_0}$. Maintenant, si l'inégalité était stricte, on aurait a fortiori $x_{n_0+1} \lneq^+ x_{n_0}$, contredisant le caractère minimal de x_{n_0} dans E pour $<^+$.

  Ainsi, $x_{n_0+1} = x_{n_0}$, puis par récurrence immédiate (raisonnement similaire), $x_{n_0+p} = x_{n_0}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$: la suite est donc stationnaire, et $(E,<)$ est bien nœthérien.

2. On admet (provisoirement) que $(\mathbb{N}^2, \leq_{lex})$ est nœtherien. L'élément $(1515, 0)$ possède une infinité de minorants, par exemple tous les couples $(1024, n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Prenons R et T deux préordres. Montrons que $R \times T$ est un préordre. Supposons donc $(x_1, y_1) R \times T (x_2, y_2)$ et $(x_1, y_1) R \times T (x_2, y_2)$. On a quatre possibilités :

   – $x_1 R x_2$ et $x_2 R x_3$ d'où par transitivité de R, $x_1 R x_3$ d'où $(x_1, y_1) R \times T (x_3, y_3)$
   – $x_1 R x_2$ et $x_2 = x_3$ et $y_2 T y_3$ d'où $x_1 R x_3$ et donc $(x_1, y_1) R \times T (x_3, y_3)$
   – $x_1 = x_2$ et $y_1 T y_2$ et $x_2 R x_3$ d'où $x_1 R x_3$ et donc $(x_1, y_1) R \times T (x_3, y_3)$
   – $x_1 = x_2 = x_3$ et $y_1 T y_2 T y_3$ d'où, par transitivité de T : $(x_1, y_1) R \times T (x_3, y_3)$.

4. Prenons R et T deux relations nœthériennes. Montrons par l'absurde que $R \times T$ est une relation nœthérienne. Soit $(x_i, y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante, c'est à dire

$$\cdots (R \times T)(x_3, y_3)(R \times T)(x_2, y_2)(R \times T)(x_1, y_1),$$

   chaque couple (x_i, y_i) étant distinct des autres. Alors :

   – il existe $i_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{i_1} R_{strict} x_1$. En effet, si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ était constante, alors cela imposerait à la suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'être strictement décroissante, ce qui est impossible car T est une relation nœthérienne.
   – de même, il existe $i_2 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{i_2} R_{strict} x_{i_1}$. En effet, si $(x_i)_{i\leq i_1}$ était constante, alors cela imposerait à la suite $(y_i)_{i\leq i_1}$ d'être strictement décroissante, ce qui est impossible car T est une relation nœthérienne.
   – ...

   Ainsi, on construit une suite $(x_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ qui est strictement décroissante, ce qui est contradictoire avec le fait que R soit une relation nœthérienne. Donc : il n'existe pas de suite strictement décroissante pour $R \times T$. $R \times T$ est donc nœthérien.

5. – $(\mathbb{N}, \leq)$ (ordre usuel)
   – $(\mathbb{N}^2, \leq_{lex})$ (ordre lexicographique) (cf 4.)

– de même, par récurrence sur k : $(\mathbb{N}^k, \leq_{lex})$

– Par contre, si $A = \{a, b\}$ est muni du préordre $<= \{(a, b)\}$, on munit naturellement A^* du préordre lexicographique $<_{lex}$ associé. Après avoir essayé de montrer que ce préordre était nœthérien, la suite strictement décroissante suivante permet d'affirmer le contraire :

$$\cdots <_{lex} aaab = x_3 <_{lex} aab = x_2 <_{lex} ab = x_1 <_{lex} b = x_0.$$

4 Fonctions convexes

1. Bien entendu, on supposera dans cette question f convexe...

   Pour $n \in \mathbb{N}*$, soit $T(n)$ la propriété suivante :

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \qquad f\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\Big) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

- On va commencer par prouver la propriété $T(n)$ lorsque n est une puissance de 2. Plus précisément, pour $p \in \mathbb{N}$, notons $H(p)$ la proposition $T(2^{p+1})$.
  - $H(0)$ vient de la définition de f convexe.
  - Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $H(p)$ est vérifiée. On va montrer $H(p+1)$, en commençant par fixer $x_1, \ldots, x_{2^{p+2}} \in \mathbb{R}$. On va commencer par poser

$$y_1 = \frac{x_1 + \cdots + x_{2^{p+1}}}{2^{p+1}}$$

et

$$y_2 = \frac{x_{2^{p+1}+1} + \cdots + x_{2^{p+2}}}{2^{p+1}}.$$

On peut alors appliquer la définition de la convexité, qui nous fournit

$$f\Big(\frac{y_1 + y_2}{2}\Big) \leq \frac{f(y_1) + f(y_2)}{2}$$

soit encore :

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{p+2}}}{2^{p+2}}\Big) \leq \frac{f(y_1) + f(y_2)}{2},$$

puis en utilisant $H(p)$, c'est-à-dire $T(2^{p+1})$ pour $f(y_1)$ et $f(y_2)$:

$$f(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{p+2}}}{2^{p+2}}) \leq \frac{f(y_1) + f(y_2)}{2}$$

$$f(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{p+2}}}{2^{p+2}}) \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_{2^{p+1}})}{2^{p+1}} + \frac{f(x_{2^{p+1}+1}) + \cdots + f(x_{2^{p+2}})}{2^{p+1}}\Big)$$

$$f(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{p+2}}}{2^{p+2}}) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_{2^{p+2}})}{2^{p+2}}.$$

Ceci étant vrai pour tout $x_1, \ldots, x_{2^{p+2}}$, on a bien établi $H(p+1)$.
Ainsi, $H(p) \Rightarrow H(p+1)$.
Puisque p était fixé quelconque, on vient de montrer :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad H(p) \Rightarrow H(p+1).$$

Ainsi, on a $H(0)$ et $\forall p \in \mathbb{N}, H(p) \Rightarrow H(p+1)$, ce qui nous permet d'affirmer grâce au principe Ind_C ("modifié") appliqué à H, que $H(p)$ est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$.

- Soit maintenant n quelconque. Montrons $T(n)$ (il n'y a plus d'induction de la forme Ind_C). Si n est de la forme 2^p, il n'y a rien à faire. Sinon, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n < 2^p$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Notons $m = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, et définissons, pour $k \in [\![n+1, 2^p]\!]$, $x_k = m$. Grâce à $T(2^p)$, on peut écrire :

$$f\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n + (2^p - n)m}{2^p}\Big) \leq \frac{1}{2^p}\big(f(x_1)+\cdots+f(x_n)+(2^p-n)f(m)\big),$$

or $x_1 + \cdots + x_n = nm$, de sorte que $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n + (2^p - n)m}{2^p} = m$, et ainsi :

$$2^p f(m) \leq f(x_1) + \cdots + f(x_n) + (2^p - n)f(m),$$

et on en déduit sans trop de mal :

$$f(m) \leq \frac{1}{n}\big(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\big).$$

2. Le principe d'induction utilisé consiste à parcourir tous les entiers, mais pas dans l'ordre habituel:

$$\Big(\mathcal{P}(1) \wedge \big(\forall p \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(2^p) \Rightarrow \mathcal{P}(2^{p+1})\big) \wedge \big(\forall p, \mathcal{P}(2^p) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^p, \mathcal{P}(n))\big)\Big) \Rightarrow \Big(\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)\Big)$$

Dans la suite, nous appellerons Ind_{New} cette nouvelle induction.

3. Montrons maintenant que cette induction est équivalente à la suivante : (Ind_C)

$$\Big(\mathcal{P}(1) \wedge \big(\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\big)\Big) \Rightarrow \Big(\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)\Big)$$

- Montrons tout d'abord $Ind_C \Rightarrow Ind_{new}$: Soit $\mathcal{P}$ une propriété vérifiant :

$\mathcal{P}(1) \wedge \big(\forall p \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(2^p) \Rightarrow \mathcal{P}(2^{p+1})\big) \wedge \big(\forall p, \mathcal{P}(2^p) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^p, \mathcal{P}(n)\big)$

soit encore :

$$\mathcal{P}(1) \wedge \Big(\forall p \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(2^p)\Big) \Rightarrow \Big(\mathcal{P}(2^{p+1}) \wedge \big(\forall n < 2^p, \mathcal{P}(n)\big)\Big)$$

Alors, en notant $\mathcal{H}(p)$ la propriété

$$\Big(\mathcal{P}(2^p) \wedge \big(\forall n < 2^p, \mathcal{P}(n)\big)\Big)$$

Elle vérifie $\mathcal{H}(1)$ et comme par hypothèse :

$$\mathcal{P}(2^{p+1}) \wedge \big(\forall n < 2^p, \mathcal{P}(n)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(2^{p+2}) \Rightarrow \big(\forall n < 2^{p+1}, \mathcal{P}(n)\big)$$

Alors $\mathcal{H}(p) \Rightarrow \mathcal{H}(p+1)$ et en appliquant Ind_C à $\mathcal{H}$, on récupère $\forall k, \mathcal{H}(k)$ donc $\forall k, \mathcal{P}(k)$.

- Montrons maintenant $Ind_C \Rightarrow Ind_{new}$: Soit $\mathcal{P}$ une propriété vérifiant :

$$\mathcal{P}(1) \wedge \big(\forall n, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

  – Montrons que $\forall p, \mathcal{P}(2^p) \Rightarrow \mathcal{P}(2^{p+1})$: Trivialement:

$$\mathcal{P}(2^p) \Rightarrow \mathcal{P}(2^p+1) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \mathcal{P}(2^p+1)$$

  – Montrons que $\forall p,\ \mathcal{P}(2^p) \Rightarrow \big(\forall n < 2^p, \mathcal{P}(n)$ (par l'absurde). Supposons l'existence d'un $n < 2^p$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est faux. Alors l'ensemble $\{k \leq 2^p, \mathcal{P}(k) faux\}$ est non vide, soit donc k_0 son P.P.E. $k_0 = 2^p$ est impossible donc $2^{p-1} < k_0 < 2^p$ Or $\mathcal{P}(2^p)$ est vraie donc aussi $\mathcal{P}(2^p+1)$ et par suite $\mathcal{P}(k_0)$ aussi ce qui est absurde.

    Donc finalement, les hypothèses de Ind_{new} sont vérifiées, donc $\forall k, \mathcal{P}(k)$ et l'implication demandée.

    On a donc l'équivalence : $Ind_C \Leftrightarrow Ind_{new}$.