Magistère d'Informatique et Modélisation

Devoir de Logique : *induction et ordres*

à remettre le 12 octobre 2000

Exercice 1 : bornes supérieures

Soit $(E, <)$ un ensemble ordonné. Un *majorant* d'un sous-ensemble A de E est un elément $m \in E$ tel que $(\forall a \in A)\ m > a$. Un élément b est le *minimum* de A si $b \in A$ et si $(\forall a \in A)\ b \leq a$. Un élément est la *borne supérieure* de A si c'est le minimum de l'ensemble des majorants de A.

1. Quelle est, si elle existe, la borne supérieure de $\emptyset$? De E ?
2. Quelles sont les conditions d'existence de cette borne supérieure ?

Exercice 2 : fermeture transitive

Si R et T sont deux relations binaires notées de façon infixée (c-à-d, $x\ R\ y$). On définit

- $x\ RT\ y$ si et seulement si il existe z tel que $x\ R\ z$ et $z\ T\ y$.
- R^n par $R^1 = R$ et $R^{n+1} = R\,R^n$.
- $R \subseteq T$ si et seulement $x\ R\ y$ implique $x\ T\ y$.
- $x\ (R \bigcup T)\ y$ ssi $x\ R\ y$ ou $x\ T\ y$.

Une relation est transitive si $x\ R\ y$ et $y\ R\ z$ impliquent $x\ R\ z$. La *fermeture transitive* de R est la plus petite relation transitive qui contient R.

1. Montrez que R est transitive si et seulement si $R\,R \subseteq R$.
2. Montrez que la fermeture transitive est la relation

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n.$$

On note R^+ la fermeture transtive de R.

Exercice 3 : ordre bien fondé

Une relation transitive est aussi appelée un *préordre*.

Une relation $>$ est *noethérienne* (ou *bien fondée*), si toute suite infinie $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *décroissante* (c-à-d telle que[1] $(\forall i \in \mathbb{N})(\forall\ j \in \mathbb{N}) i < j \Rightarrow x_i \geq x_j$) est *stationnaire* (c-à-d telle qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ qui satisfait $(\forall i \in \mathbb{N})\ x_i = x_k$). De façon équivalente, cela signifie qu'il n'existe pas de suite infinie *strictement décroissante* (c-à-d telle $(\forall i \in \mathbb{N})(\forall j \in \mathbb{N})\ i > j \Rightarrow x_i > x_j$).

Le produit lexicographique de deux relations R sur E et T sur F est une relation $R \times T$ sur $E \times F$ telle que $(x_1, y_1)\ R \times T\ (x_2, y_2)$ si $x_1\ R\ x_2$ ou $x_1 = x_2$ et $y_1\ T\ y_2$.

1. Montrez qu'une relation $<$ est noethérienne si et seulement si toute partie non vide admet un minimal[2] pour le préordre $<^+$.

[1] $a \geq b$ signifie «$a > b$ ou $a = b$».

[2] Un élément $m \in A$ est un *minimal* de A si $x < m$ implique $x \notin A$.

2. Construisez un ordre bien fondé dans lequel il y a un élément ayant un ensemble infini de minorants.
3. Montrez que le produit lexicographique de deux préordres et un préordre.
4. Montrez que le produit lexicographique de deux relations noethériennes est une relation noethérienne.
5. Donnez des exemples de préordres noethériens.

Exercice 4 : fonctions convexes

La règle d'induction généralisé[3] Ind_G est la suivante :

$$Ind_G : (\forall P) \ (\{(\forall n)[(\forall m) m < n \Rightarrow P(m)] \Rightarrow P(n)\} \Rightarrow (\forall k) P(k))$$

Elle dépend d'une relation d'ordre bien fondé et est quantifiée universellement sur les prédicats. Elle permet de prouver qu'une propriété P est satisfaite sur un ensemble muni d'une relation d'ordre bien fondé $>$.

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe si

$$(\forall x_1 \in \mathbb{R})(\forall x_2 \in \mathbb{R}) \ \ f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^+$ et $x_1 \in \mathbb{R}, ..., x_n \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + ... + f(x_n)}{n}.$$

   Indication : L'induction qu'on peut utiliser est une induction qui ne parcourt pas les entiers linéairement, mais comme à la procession d'Echternach[4].
2. Énoncez la règle d'induction utilisée.
3. Prouvez la l'équivalence de cette règle d'induction avec la règle

$$Ind_C : (\forall P) \ ([P(0) \vee (\forall n) P(n) \Rightarrow P(n+1)] \Rightarrow (\forall k) P(k)).$$

[3]Donnée ici à titre culturel.
[4]http ://www.cathol.lu/dansante.html