Magistère d'Informatique et Modélisation

Exercices de λ-calcul

Novembre – decembre 2000

Exercice 1

Un terme $M \in \Lambda$ tel que pour tout $F \in \Lambda$, on ait $M\,F =_\beta F(M\,F)$ est appelé un *combinateur de point fixe.*

1. Soit $A \equiv \lambda xy \cdot y(xxy)$ et $\Theta \equiv AA$. Soit F un terme quelconque. Montrez que $\Theta F \xrightarrow[\beta]{} F(\Theta F)$.
2. Soit $\mathbf{Y} \equiv \lambda f \cdot (\lambda x \cdot f(xx))(\lambda x \cdot f(xx))$ et $G \equiv \lambda yf \cdot f(yf)$. Réduisez $\mathbf{Y}G$ trois fois. Déduisez-en une dérivation qui lie $\mathbf{Y}G$ et Θ.
3. Étant donnés deux termes M et N et x une variable, montrez que $xM \xrightarrow[\beta]{} N$ implique qu'il existe N' tel que $N =_\beta xN'$.
4. Montrez que si M est un combinateur de point fixe et x une variable quelconque, alors il existe P tel que $Mx \xrightarrow[\beta]{} xP$.
5. Montrez que si M est un combinateur de point fixe, il existe Q tel que $M \xrightarrow[\beta]{} \lambda y \cdot Q$.
6. Montrez que si M est un combinateur de point fixe, $\lambda x \cdot Mx \xrightarrow[\beta]{} \lambda y \cdot Q$.
7. Conclure que si M est un combinateur de point fixe, $\lambda x \cdot Mx =_\beta M$.
8. Montrez que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) M est un combinateur de point fixe,
   (ii) $M =_\beta GM$.
   (iii) M est un point fixe de G.
9. Construisez une suite infinie $(\mathbf{Y}^i)_{i\in\mathbb{N}}$ de combinateurs points fixes. *(Cette question peut-être résolue en admettant la précédente).*
10. Que dire des termes $\mathbf{Y}^0$, $\mathbf{Y}^1$ et $\mathbf{Y}^2$ et de leurs formes normales ?

Exercice 2

Une théorie est incohérente (ou inconsistante), si pour A et tout B, $A = B$. On rappelle que $\mathbf{S} = \lambda xyz.xz(yz)$, $\mathbf{K} = \lambda xy.x$ et $\mathbf{I} = \lambda x.x$. On veut montrer que, si on ajoute au λ-calcul, l'identité $\mathbf{S} = \mathbf{K}$, il devient incohérent.

1. De $\mathbf{S}ABC = \mathbf{K}ABC$, déduisez une identité de la forme $MN = M$.
2. En remplaçant A par $\mathbf{I}$ et C par $\mathbf{I}$ dans l'identité précédente, déduisez $B\mathbf{I} = \mathbf{I}$.
3. En choisissant B de façon appropriée dans $B\mathbf{I} = \mathbf{I}$, montrez que, pour tout P, on a $P = \mathbf{I}$.
4. Quelle est l'identité directement déduite de $\mathbf{S} = \mathbf{K}$ qui réduit à $P = \mathbf{I}$?