Magistère d'Informatique et Modélisation

Exercices de Logique : *logique minimale*

Les exercices qui suivent traitent de la logique propositionnelle minimale, c-à-d celle qui n'a comme seul connecteur que le connecteur d'implication $\rightarrow$.

Exercice 1: Système hilbertien

Le système hilbertien de la logique propositionnelle intuitionniste minimale est le système dans lequel il y a le *modus ponens* et les deux axiomes :

$$\begin{array}{ll} \vdash_{HM} (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \rightarrow \chi & (S) \\ \vdash_{HM} \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi & (K) \end{array}$$

Démontrez les propositions suivantes.

1. $\vdash_{HM} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \rightarrow \varphi$,
2. $\vdash_{HM} \varphi \rightarrow \varphi$,
3. $\vdash_{HM} \psi \rightarrow \varphi \rightarrow \varphi$,
4. $\vdash_{HM} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\chi \rightarrow \varphi) \rightarrow \chi \rightarrow \psi$.

Exercice 2: Déduction naturelle

On se place dans le système de déduction naturelle de la logique propositionnelle minimale.

1. Prouvez (S) et (K).
2. Prouvez les propositions 1 à 4 de l'exercice précédent.
3. Si $\vdash_{NM} \varphi$ sont les théorèmes de la déduction naturelle, montrez que $\vdash_{HM} \varphi$ implique $\vdash_{NM} \varphi$.
4. Comparez la taille des preuves obtenues dans la question 2 pour les propositions 1 à 4 de l'exercice précédent et celle obtenues en traduisant en déduction naturelle les preuves (en système hilbertien) de l'exercice précédent.

Exercice 3: L'axiome de Pierce

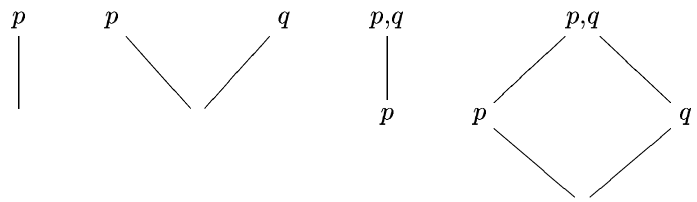
1. Montrez que l'axiome de Pierce $\pi =^{def} ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ est une tautologie de la logique propositionnelle classique, autrement dit si v est la valuation habituelle des propositions dans $\{0,1\}$, alors $v(\pi) = 1$.
2. À votre avis, π est-il un théorème de la logique propositionnelle minimale ?

Exercice 3: Un raisonnement non intuitionniste

1. Montrez qu'il existe deux nombres irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel. *Indication :* On peut faire l'hypothèse que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, mais aussi son contraire.
2. A-t-on exhibé les nombres a et b ?

Exercice 4: Modèles de Kripke

1. Attachez les propositions $p \to p$, $p \to q$ et $q \to p$ aux différents mondes des modèles de Kripke suivants.



2. Trouvez un modèle de Kripke $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \pi$, où π est l'axiome de Pierce.