Magistère d'informatique et modélisation

Complétude du calcul propositionnel intuitionniste vis-à-vis des modèles de Kripke

Eléments de correction par Laure DANTHONY

BUT DU PROBLEME On veut ici prouver que la validé d'une proposition du calcul propositionnel intuitionniste (dans le cadre des modèles de Kripke) entraîne sa prouvabilité.

On veut plus formellement montrer que si $\Gamma \nvdash \varphi$, alors il existe un modèle de Kripke $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \vDash \varphi_i$ pour $\varphi_i \in \Gamma$ et $\mathcal{M} \nvDash \varphi$. Et donc le corrolaire important suivant :

THÉORÈME 1 *Si $\nvdash \varphi$ alors $\nvDash \varphi$ (c'est à dire qu'il existe un modèle de Kripke $\mathcal{K}$ tel que $\mathcal{K} \nvDash \varphi$). "valide implique prouvable"*

Partie 1 : Modèles finis ou infinis (compacité)

Dans cette partie on veut montrer que l'étude de la complétude des modèles de Kripke peut être réduite aux seuls cas des modèles finis.

1. On veut montrer que, si $[u] \in \mathcal{I}_{-}(p)$, et $[u] \leq [v]$, alors $[v] \in \mathcal{I}_{-}(p)$. Supposons donc $[u] \in \mathcal{I}_{-}(p)$ et $[u] \leq [v]$ (cad $[u] \subset [v]$), alors $p \in [u]$ donc $p \in [v]$ soit $[v] \in \mathcal{I}_{-}(p)$.
2. Par définition, $[u] = \{\varphi \in \Gamma | u \Vdash \varphi\}$ donc, pour $\varphi \in \Gamma$, on a $\varphi \in [u]$ ssi $u \Vdash \varphi$. Ce qui établit que *iii* $\Leftrightarrow$ *ii*. On montre *i* $\Leftrightarrow$ *iii* par induction structurelle sur la formule φ.
3. Chaque $[u]$ est un élément de $\mathcal{P}(\Gamma)$, donc U_Γ est inclus dans $\mathcal{P}(\Gamma)$ qui est fini puisque Γ l'est.
4. Le sens direct est clair. Pour l'autre sens, on fixe un modèle $\mathcal{K}$ (infini), et un monde $u \in \mathcal{U}$. On doit montrer $u \vDash \varphi$. $\mathcal{K}_\Gamma \vDash \varphi$, donc $[u] \Vdash \varphi$, donc $u \Vdash \varphi$. D'où $\mathcal{K} \vDash \varphi$ et donc, comme $\mathcal{K}$ était quelconque, $\vDash \varphi$.

Pour comprendre, traiter le cas où $\varphi = p \vee q$, quel est Γ et quel est $\mathcal{K}_\Gamma$?

Partie 2 : Ensembles premiers

Il faut remarquer qu'à chaque nouvelle construction d'un Γ_i, on reconsidère *toutes* les propositions disjonctives, dans l'ordre, à l'exception de celles qui ont été prises pour construire un Γ_i précédent. Bref, on prend les d_m, avec $m \in \mathbb{N} \setminus \{n_1, \ldots, n_{k-1}\}$.

1. Chaque Γ_k prouve une infinité de disjonctions (au moins les $\varphi_0, \varphi_0 \vee \varphi_0, \ldots$, où $\varphi_0 \in \Gamma$), donc il prouve une disjonction au delà de $(\psi \vee \chi)_{n_{k-1}}$.

2. On prouve tout d'abord (à l'aide des axiomes de la logique intuitionniste) le lemme suivant :
$$\frac{\Gamma_k \vdash \psi_{n_k} \qquad \Gamma_k, \psi_{n_k} \vdash \varphi}{\Gamma_k \vdash \varphi}.$$
Ensuite supposons qu'on ait à la fois $\Gamma_k, \psi_{n_k} \vdash \varphi$ et $\Gamma_k, \chi_{n_k} \vdash \varphi$, ainsi que $\Gamma_k \vdash \psi_{n_k} \vee \chi_{n_k}$. Par exemple, supposons $\Gamma_k \vdash \psi_{n_k}$; alors, d'après le lemme, on aurait $\Gamma_k \vdash \varphi$, ce qui est absurde.

3. Aucun des Γ_k n'infère φ, donc Γ ne peut inférer φ (les preuves sont finies).

4. Il s'agit de montrer que Γ' vérifie les deux conditions de primalité :

   (a) On veut montrer que si $\Gamma' \vdash g$, alors $g \in \Gamma'$ (clôture). On sait qu'il existe k_0 tel que $\Gamma_{k_0} \vdash g$, alors, $\forall k \geq k_0, \Gamma_k \vdash g \vee g$. La disjonction $g \vee g$ sera donc prise à un moment k_1 et alors $\Gamma_{k_1} \vdash g \vee g$,et donc (cf question 2.) $g \in \Gamma_{k_1+1}$ donc $g \in \Gamma'$.

   (b) Supposons que $\psi \vee \chi \in \Gamma'$. Alors il existe k_0 tel que $\psi \vee \chi \in \Gamma_{k_0}$. On a donc $\Gamma_{k_0} \vdash \psi \vee \chi$ et $\forall k \geq k_0, \Gamma_k \vdash \psi \vee \chi$. Alors $\psi \vee \chi$ a été considéré à un certain moment. Donc ψ ou χ est dans un certain $\Gamma_{k'}$, donc finalement dans Γ'.

Partie 3 : Théorème de complétude

1. Faire $\Big(\Gamma(\alpha) \cup \{\sigma_i\}\Big)'$ qui est bien premier.

2. Si $\Gamma(\alpha) \vdash \psi_1$, alors $\alpha \Vdash \psi_1$ alors $\alpha \Vdash \psi_2$ et donc $\Gamma(\alpha) \vdash \psi_2$

3. Se montre par induction structurelle sur ψ.

4. La première partie se montre aussi par induction structurelle sur ψ. La deuxième partie s'effectue à l'aide de la question précédente, en faisant $\alpha = \epsilon : \epsilon \Vdash \varphi$ ssi $\Gamma(\epsilon) \vdash \varphi$ et en remarquant que $\Gamma(\epsilon) = \Gamma' \nvdash \varphi$ par la construction de la partie 2.

5.