

# Magistère d'informatique et modélisation

## Complétude du calcul propositionnel intuitionniste vis-à-vis des modèles de Kripke

Éléments de correction par Laure DANTHONY

**BUT DU PROBLEME** On veut ici prouver que la validé d'une proposition du calcul propositionnel intuitionniste (dans le cadre des modèles de Kripke) entraîne sa prouvabilité.

On veut plus formellement montrer que si  $\Gamma \not\vdash \varphi$ , alors il existe un modèle de Kripke  $\mathcal{M}$  tel que  $\mathcal{M} \vDash \varphi_i$  pour  $\varphi_i \in \Gamma$  et  $\mathcal{M} \not\vdash \varphi$ . Et donc le corrolaire important suivant :

**THÉORÈME 1** *Si  $\Gamma \not\vdash \varphi$  alors  $\not\vdash \varphi$  (c'est à dire qu'il existe un modèle de Kripke  $\mathcal{K}$  tel que  $\mathcal{K} \not\vdash \varphi$ ). "valide implique prouvable"*

## Partie 1 : Modèles finis ou infinis (compacité)

Dans cette partie on veut montrer que l'étude de la complétude des modèles de Kripke peut être réduite aux seuls cas des modèles finis.

1. On veut montrer que, si  $[u] \in \mathcal{I}_-(p)$ , et  $[u] \leq [v]$ , alors  $[v] \in \mathcal{I}_-(p)$ .  
Supposons donc  $[u] \in \mathcal{I}_-(p)$  et  $[u] \leq [v]$  (cad  $[u] \subset [v]$ ), alors  $p \in [u]$  donc  $p \in [v]$  soit  $[v] \in \mathcal{I}_-(p)$ .
2. Par définition,  $[u] = \{\varphi \in \Gamma \mid u \Vdash \varphi\}$  donc, pour  $\varphi \in \Gamma$ , on a  $\varphi \in [u]$  ssi  $u \Vdash \varphi$ . Ce qui établit que  $iii \Leftrightarrow ii$ . On montre  $i \Leftrightarrow iii$  par induction structurelle sur la formule  $\varphi$ .
3. Chaque  $[u]$  est un élément de  $\mathcal{P}(\Gamma)$ , donc  $U_\Gamma$  est inclus dans  $\mathcal{P}(\Gamma)$  qui est fini puisque  $\Gamma$  l'est.
4. Le sens direct est clair. Pour l'autre sens, on fixe un modèle  $\mathcal{K}$  (infini), et un monde  $u \in \mathcal{U}$ . On doit montrer  $u \vDash \varphi$ .  $\mathcal{K}_\Gamma \vDash \varphi$ , donc  $[u] \Vdash \varphi$ , donc  $u \Vdash \varphi$ . D'où  $\mathcal{K} \vDash \varphi$  et donc, comme  $\mathcal{K}$  était quelconque,  $\vDash \varphi$ .

Pour comprendre, traiter le cas où  $\varphi = p \vee q$ , quel est  $\Gamma$  et quel est  $\mathcal{K}_\Gamma$  ?

## Partie 2 : Ensembles premiers

Il faut remarquer qu'à chaque nouvelle construction d'un  $\Gamma_i$ , on reconsidère *toutes* les propositions disjonctives, dans l'ordre, à l'exception de celles qui ont

été prises pour construire un  $\Gamma_i$  précédent. Bref, on prend les  $d_m$ , avec  $m \in \mathbb{N} \setminus \{n_1, \dots, n_{k-1}\}$ .

1. Chaque  $\Gamma_k$  prouve une infinité de disjonctions (au moins les  $\varphi_0, \varphi_0 \vee \varphi_0, \dots$ , où  $\varphi_0 \in \Gamma$ ), donc il prouve une disjonction au delà de  $(\psi \vee \chi)_{n_{k-1}}$ .
2. On prouve tout d'abord (à l'aide des axiomes de la logique intuitionniste) le lemme suivant :

$$\frac{\Gamma_k \vdash \psi_{n_k} \quad \Gamma_k, \psi_{n_k} \vdash \varphi}{\Gamma_k \vdash \varphi}.$$

Ensuite supposons qu'on ait à la fois  $\Gamma_k, \psi_{n_k} \vdash \varphi$  et  $\Gamma_k, \chi_{n_k} \vdash \varphi$ , ainsi que  $\Gamma_k \vdash \psi_{n_k} \vee \chi_{n_k}$ . Par exemple, supposons  $\Gamma_k \vdash \psi_{n_k}$  ; alors, d'après le lemme, on aurait  $\Gamma_k \vdash \varphi$ , ce qui est absurde.

3. Aucun des  $\Gamma_k$  n'infère  $\varphi$ , donc  $\Gamma$  ne peut inférer  $\varphi$  (les preuves sont finies).
4. Il s'agit de montrer que  $\Gamma'$  vérifie les deux conditions de primalité :
  - (a) On veut montrer que si  $\Gamma' \vdash g$ , alors  $g \in \Gamma'$  (clôture). On sait qu'il existe  $k_0$  tel que  $\Gamma_{k_0} \vdash g$ , alors,  $\forall k \geq k_0, \Gamma_k \vdash g \vee g$ . La disjonction  $g \vee g$  sera donc prise à un moment  $k_1$  et alors  $\Gamma_{k_1} \vdash g \vee g$ , et donc (cf question 2.)  $g \in \Gamma_{k_1+1}$  donc  $g \in \Gamma'$ .
  - (b) Supposons que  $\psi \vee \chi \in \Gamma'$ . Alors il existe  $k_0$  tel que  $\psi \vee \chi \in \Gamma_{k_0}$ . On a donc  $\Gamma_{k_0} \vdash \psi \vee \chi$  et  $\forall k \geq k_0, \Gamma_k \vdash \psi \vee \chi$ . Alors  $\psi \vee \chi$  a été considéré à un certain moment. Donc  $\psi$  ou  $\chi$  est dans un certain  $\Gamma_{k'}$ , donc finalement dans  $\Gamma'$ .

### Partie 3 : Théorème de complétude

1. Faire  $(\Gamma(\alpha) \cup \{\sigma_i\})'$  qui est bien premier.
2. Si  $\Gamma(\alpha) \vdash \psi_1$ , alors  $\alpha \Vdash \psi_1$  alors  $\alpha \Vdash \psi_2$  et donc  $\Gamma(\alpha) \vdash \psi_2$
3. Se montre par induction structurelle sur  $\psi$ .
4. La première partie se montre aussi par induction structurelle sur  $\psi$ . La deuxième partie s'effectue à l'aide de la question précédente, en faisant  $\alpha = \epsilon : \epsilon \Vdash \varphi$  ssi  $\Gamma(\epsilon) \vdash \varphi$  et en remarquant que  $\Gamma(\epsilon) = \Gamma' \not\vdash \varphi$  par la construction de la partie 2.
- 5.