Magistère d'Informatique et Modélisation

Examen de Logique, *première partie*

Janvier 2001

Documents autorisés. Rédigez chaque partie sur une copie séparée. Utilisez si vous le désirez une "feuille de calcul".

Exercice 1

Considérons l'arbre de preuve

$$\mathbf{A} = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{p, p, p \vdash p}{p, p \vdash p \Rightarrow p}}{p \vdash p \Rightarrow p \Rightarrow p} \quad ?}{p \vdash p \Rightarrow p} \quad ?}{p \vdash p}}{\vdash p \Rightarrow p}$$

1. Complétez les parties manquantes.
2. Indiquez les règles utilisées.
3. En se référant à l'isomorphisme de Curry-Howard, remplacez dans la feuille de calcul, les points par le terme de preuve correspondant.
4. Dans le lambda-calcul, simplifiez le terme de la preuve correspondant à $p \Rightarrow p$.
5. Déduire une preuve plus simple de la même proposition dérivée du terme de preuve simplifié, correspondant à un arbre de preuve **B**. Quel est cet arbre de preuve?
6. Expliquez en partant de l'arbre de preuve **A** comment les différentes transformations permettent de passer de **A** à **B**. On donnera les arbres de preuves intermédiaires.

Exercice 2

Donnez un modèle de Kripke qui ne valide pas $\neg\neg p \Rightarrow p$.

Feuille de calcul

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p,p,p\vdash p}{p,p\vdash p\Rightarrow p}}{p\vdash p\Rightarrow p\Rightarrow p}\;?}{p\vdash p\Rightarrow p}\;?}{p\vdash p}}{\vdash p\Rightarrow p}$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p,p,p\vdash p}{p,p\vdash p\Rightarrow p}}{p\vdash p\Rightarrow p\Rightarrow p}\;?}{p\vdash p\Rightarrow p}\;?}{p\vdash p}}{\vdash p\Rightarrow p}$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\ldots\ldots p,\ldots\ldots p,\ldots\ldots p\vdash\ldots\ldots p}{\ldots\ldots p,\ldots\ldots p\vdash\ldots\ldots\ldots\ldots p\Rightarrow p}}{\ldots\ldots p\vdash\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p\Rightarrow p\Rightarrow p}\;?}{\ldots\ldots p\vdash\ldots\ldots\ldots\ldots p\Rightarrow p}\;?}{\ldots\ldots p\vdash\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p}}{\vdash\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p\Rightarrow p}$$