Modèles de Kripke

Laure Danthony

Contents

1 Notations

Dans la suite, on note :

- les propositions $\varphi, \psi, \chi, \theta, \ldots$
- les variables propositionnelles $p, q, r, s, t, \ldots$
- les environnements $\Gamma, \Theta, \Sigma, \ldots$

2 Modèles de Kripke, définitions

Définition 1

Un **modèle de Kripke** est un triplet $\mathcal{M} = (\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, \mathcal{I}_{\mathcal{M}}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ où :

- $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ est un ensemble dont les éléments sont appelés **mondes, mondes possibles, étapes (de raisonnement) ou des états** et sont notés u, v, w ;
- $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}$ une fonction $Variables \to \mathcal{P}(\mathcal{U}_{\mathcal{M}})$: intuitivement, $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p)$ est l'ensemble des mondes où la variable p est satisfaite ;
- $\mathcal{R}_{\mathcal{M}} = (R_1, \ldots, R_n)$ est un ensemble de relations dites **d'accessibilité** sur les mondes.

3 Relations d'accessibilité dans le cas propositionnel

On se place dans toute la suite dans le cas propositionnel : l'ensemble $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}$ ne contient qu'une relation notée $\leq_{\mathcal{M}}$ qui est un ordre (réflexivité, antisymétrie, transitivité).

La fonction $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}$ est **dirigée**, c'est à dire que, quelle que soit la variable propositionnelle p,

$$\text{si } u \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p) \text{ et } u \leq_{\mathcal{M}} v, \text{ alors } v \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p).$$

4 Le forçage

DÉFINITION 2
On définit sur $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ une relation dite **de forçage** qui s'écrit $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ et qui est définie de la façon suivante :

- si φ est une **variable**, $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ ssi $u \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(\varphi)$;
- si φ est une **conjonction** $\psi \wedge \theta$, alors $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ ssi $\mathcal{M}, u \Vdash \psi$ et $\mathcal{M}, u \Vdash \theta$;
- si φ est une **disjonction**, $\psi \vee \theta$, alors $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ ssi $\mathcal{M}, u \Vdash \psi$ ou $\mathcal{M}, u \Vdash \theta$;
- si φ est une **implication** $\psi \Rightarrow \theta$, alors $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ ssi pour tout v tel que $v \geq_{\mathcal{M}} u$, si $\mathcal{M}, u \Vdash \psi$ alors $\mathcal{M}, u \Vdash \theta$;
- si $\perp$ est **l'absurde**, alors $\mathcal{M}, u \nVdash \perp$.

PROPOSITION 1 (MONOTONICITÉ DU FORÇAGE) *$\leq_{\mathcal{M}}$ est monotone, c'est-à-dire : si $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ et $u \leq_{\mathcal{M}} v$, alors $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$.*

COROLLAIRE 1 *Pour tout φ, l'ensemble $\{u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} | u \Vdash \varphi\}$ est dirigé.*

5 Un théorème important

DÉFINITION 3
- On dit que $\mathcal{M}$ **modélise** φ (ou φ **est valide** dans $\mathcal{M}$), et on note $\mathcal{M} \models \varphi$ si, pour tout $u \in \mathcal{M}$, on a $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$.
- On dit que φ est **valide** et on note $\models \varphi$ si , pour tout modèle de Kripke $\mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \Vdash \varphi$.

THÉORÈME 1 (CORRECTION : PROUVABLE IMPLIQUE VALIDE)

$$\textit{si } \vdash \varphi, \textit{ alors } \models \varphi.$$

REMARQUE 1 On prouve ce théorème dans le cas de la logique intuitionniste à l'aide du lemme suivant : si $\Gamma \vdash \varphi$, alors $\Gamma \models \varphi$ montré par induction sur l'arbre de preuve de $\Gamma \vdash \varphi$, le modèle $\mathcal{M}$ étant *fixé*.