Résumé de Lambda-calcul

Laure Danthony

Contents

1 Notations et définitions

1.1 Presque comme en CAML !

$$\lambda x.x \equiv f : x \to x$$

DÉFINITION 1
En fait, Δ est la plus petite classe qui contient :

1. les variables x, y, $\ldots$;
2. si $M \in \Delta$, $\lambda x.M$ (M **corps** de F) ;
3. si $M \in \Delta$ et $N \in \Delta$, $(MN) \in \Delta$: on peut considérer M comme une **fonction** de **paramètre** N.

REMARQUE 1 On utilise des "raccourcis de notation" :

1. on écrit $\lambda fx.f(fx)$ pour $\lambda f(\lambda x.f(fx))$.
2. on écrit $(\lambda x.x)yy$ pour $\big((\lambda x.x)y\big)y$.

1.2 Alpha-conversion

DÉFINITION 2
L'α-conversion n'est qu'un changement de nom des variables libres : elle est transitive et ne change pas la valeur des termes.

1.3 La béta-réduction et l'éta-réduction

DÉFINITION 3
La β-réduction est une règle qui s'énonce comme suit :

$$(\lambda x.M)P \underset{\beta}{\longrightarrow} M[x := P]$$

DÉFINITION 4
L'η-réduction est une règle qui s'énonce comme suit :

$$\lambda x.Mx \underset{\eta}{\longrightarrow} M$$

DÉFINITION 5
Soit R une règle (qui possède les propriétés de congruence gauche et droite et de compatibilité avec le signe λ), alors on note $\underset{R}{\longrightarrow}$ l'application de cette règle (une fois), $\underset{R}{\twoheadrightarrow}$ sa fermeture transitive et symétrique, $\underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}$ sa fermeture transitive symétrique et réflexive.

PROPOSITION 1 *On n'a pas* $M \underset{\beta}{\longrightarrow} M$ *mais* $M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} M$ *et* $M \underset{\beta}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} M$.

1.4 La règle *ext*

DÉFINITION 6
La règle ext est la suivante :

$$ext : \frac{Mx = Nx}{M = N}$$

On a l'important résultat suivant :

$$\underset{ext}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} \equiv \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}$$

1.5 Redex et formes normales

Sur des exemples, c'est plus facile !

EXEMPLES 1
1. *$(\lambda x.P)Q$ est un β-redex de contracté $P[x := Q]$;*
2. *$\lambda x.Mx$ est un η-redex de contracté M.*

1.6 Anecdotique : les entiers de Church

DÉFINITION 7
- $\lambda fx.x \equiv K$ (zéro)
- $\lambda fx.fx \equiv 1$ (un)
- plus généralement : $\lambda fx(f^n x) \equiv n$.

On a le résultat suivant :

PROPOSITION 2 *mn (m appliqué à n) vaut n^m.*

2 Propriétés du losange et de confluence

2.1 Définitions

DÉFINITION 8
Soit R une relation. On dit que R **satisfait la propriété du losange** si, M se réduisant par R à N_1 et à N_2, il existe un terme P qui est la réduction par R à la fois de N_1 et de N_2.

DÉFINITION 9
On dit qu'une propriété R est **confluente** si sa fermeture transitive a la propriété du losange.

2.2 Théorèmes

THÉORÈME 1 (CHURCH-ROSSER) *Si R est confluente alors :*

$$M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N \Longleftrightarrow \exists P, (M \to P \vee N \to P).$$

PROPOSITION 3 *La règle β est confluente.*

2.3 Les éléments de M^*

Définition 10

1. $x^* \equiv x$
2. $(\lambda x.M)^* \equiv \lambda x.M^*$
3. $(M_1M_{)}^* \equiv M_1^*M_2^*$ si M_1M_2 n'est pas un redex
4. $\big((\lambda x.M_1)M_2\big)^* \equiv M_1^*[x := M_2^*]$.

3 Le lambda-calcul simplement typé

3.1 Notion d'environnement, de type

Définition 11
Un **environnement** est un ensemble d'association de types à des variables :

$$\Gamma \equiv x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n$$

Définition 12
Un **jugement** est l'affirmation du type σ d'un terme M sous un certain environnement Γ.
Les types sont :

- soit des variables α,
- soit des types applications $\sigma \to \tau$.

3.2 Les règles

$$(Var) \qquad \Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma$$

$$(Abs) \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma.M : \sigma \to \tau}$$

$$(App) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

3.3 Théorèmes

Théorème 2 *Si* $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ *et* $\Gamma \vdash N : \sigma$ *alors* $\Gamma \vdash M[x := N] : \tau$.

Théorème 3 *La β-réduction préserve le type, c'est-à-dire : si* $\Gamma \vdash M : \sigma$ *et si* $M \underset{\beta}{\longrightarrow} N$ *alors* $\Gamma \vdash N : \sigma$.