

Résumé de Lambda-calcul

Laure Danthony

Contents

1	Notations et définitions	2
1.1	Presque comme en CAML !	2
1.2	Alpha-conversion	2
1.3	La bêta-réduction et l'éta-réduction	2
1.4	La règle <i>ext</i>	3
1.5	Redex et formes normales	3
1.6	Anecdotique : les entiers de Church	3
2	Propriétés du losange et de confluence	3
2.1	Définitions	3
2.2	Théorèmes	3
2.3	Les éléments de M^*	4
3	Le lambda-calcul simplement typé	4
3.1	Notion d'environnement, de type	4
3.2	Les règles	4
3.3	Théorèmes	4

1 Notations et définitions

1.1 Presque comme en CAML !

$$\lambda x.x \equiv f : x \rightarrow x$$

DÉFINITION 1

En fait, Δ est la plus petite classe qui contient :

1. les variables x, y, \dots ;
2. si $M \in \Delta$, $\lambda x.M$ (M corps de F) ;
3. si $M \in \Delta$ et $N \in \Delta$, $(MN) \in \Delta$: on peut considérer M comme une **fonction de paramètre N** .

REMARQUE 1 On utilise des "raccourcis de notation" :

1. on écrit $\lambda f x.f(fx)$ pour $\lambda f(\lambda x.f(fx))$.
2. on écrit $(\lambda x.x)yy$ pour $((\lambda x.x)y)y$.

1.2 Alpha-conversion

DÉFINITION 2

L' α -conversion n'est qu'un changement de nom des variables libres : elle est transitive et ne change pas la valeur des termes.

1.3 La bêta-réduction et l'éta-réduction

DÉFINITION 3

La β -réduction est une règle qui s'énonce comme suit :

$$(\lambda x.M)P \xrightarrow{\beta} M[x := P]$$

DÉFINITION 4

L' η -réduction est une règle qui s'énonce comme suit :

$$\lambda x.Mx \xrightarrow{\eta} M$$

DÉFINITION 5

Soit R une règle (qui possède les propriétés de congruence gauche et droite et de compatibilité avec le signe λ), alors on note \xrightarrow{R} l'application de cette règle (une fois), \xrightarrow{R}^* sa fermeture transitive et symétrique, \xleftrightarrow{R} sa fermeture transitive symétrique et réflexive.

PROPOSITION 1 On n'a pas $M \xrightarrow{\beta} M$ mais $M \xrightarrow{R} M$ et $M \xleftrightarrow{\beta} M$.

1.4 La règle *ext*

DÉFINITION 6

La règle *ext* est la suivante :

$$ext : \frac{Mx = Nx}{M = N}$$

On a l'important résultat suivant :

$$\stackrel{ext}{\Leftrightarrow} \equiv \stackrel{\beta\eta}{\Leftrightarrow}$$

1.5 Redex et formes normales

Sur des exemples, c'est plus facile !

EXEMPLES 1

1. $(\lambda x.P)Q$ est un β -redex de contracté $P[x := Q]$;
2. $\lambda x.Mx$ est un η -redex de contracté M .

1.6 Anecdote : les entiers de Church

DÉFINITION 7

- $\lambda fx.x \equiv K$ (zéro)
- $\lambda fx.fx \equiv 1$ (un)
- plus généralement : $\lambda fx(f^n x) \equiv n$.

On a le résultat suivant :

PROPOSITION 2 mn (m appliqué à n) vaut n^m .

2 Propriétés du losange et de confluence

2.1 Définitions

DÉFINITION 8

Soit R une relation. On dit que R satisfait la **propriété du losange** si, M se réduisant par R à N_1 et à N_2 , il existe un terme P qui est la réduction par R à la fois de N_1 et de N_2 .

DÉFINITION 9

On dit qu'une propriété R est **confluente** si sa fermeture transitive a la propriété du losange.

2.2 Théorèmes

THÉORÈME 1 (CHURCH-ROSSER) *Si R est confluente alors :*

$$M \stackrel{R}{\Leftrightarrow} N \iff \exists P, (M \rightarrow P \vee N \rightarrow P).$$

PROPOSITION 3 *La règle β est confluente.*

2.3 Les éléments de M^*

DÉFINITION 10

1. $x^* \equiv x$
2. $(\lambda x.M)^* \equiv \lambda x.M^*$
3. $(M_1 M_2)^* \equiv M_1^* M_2^*$ si $M_1 M_2$ n'est pas un redex
4. $((\lambda x.M_1)M_2)^* \equiv M_1^*[x := M_2^*]$.

3 Le lambda-calcul simplement typé

3.1 Notion d'environnement, de type

DÉFINITION 11

Un **environnement** est un ensemble d'association de types à des variables :

$$\Gamma \equiv x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n$$

DÉFINITION 12

Un **jugement** est l'affirmation du type σ d'un terme M sous un certain environnement Γ .

Les types sont :

- soit des variables α ,
- soit des types applications $\sigma \rightarrow \tau$.

3.2 Les règles

$$(Var) \quad \Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma$$

$$(Abs) \quad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma. M : \sigma \rightarrow \tau}$$

$$(App) \quad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

3.3 Théorèmes

THÉORÈME 2 *Si $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ et $\Gamma \vdash N : \sigma$ alors $\Gamma \vdash M[x := N] : \tau$.*

THÉORÈME 3 *La β -réduction préserve le type, c'est-à-dire : si $\Gamma \vdash M : \sigma$ et si $M \xrightarrow{\beta} N$ alors $\Gamma \vdash N : \sigma$.*