Résumé de Logique

Laure Danthony

Contents

1 Logique de Hilbert

En logique de Hilbert, il n'y a que des théorèmes : il n'y a rien à gauche du signe $\vdash$.

1.1 Logique propositionnelle minimale

DÉFINITION 1
Les éléments de la logique propositionnelle minimale sont :

- Il n'y a qu'un connecteur : $\Rightarrow$, et des variables propositionnelles : $p_1, p_2, \ldots p_n, q, \ldots$.
- On adopte la convention d'associativité à droite, c'est à dire $p \Rightarrow q \Rightarrow r$ signifie $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
- Il n'y a qu'une règle, le Modus Ponens :

$$\frac{p \Rightarrow q \qquad p}{q}$$

- Il y a deux axiomes K et S :

$$K :\vdash p \Rightarrow q \Rightarrow p$$

  et

$$S :\vdash (p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow r$$

- On peut prouver la règle de Coupure qui simplifie les preuves :

$$rule\_Cut : \frac{\vdash q \Rightarrow r \qquad \vdash p \Rightarrow q}{\vdash p \Rightarrow r}$$

REMARQUE 1 La règle Cut permet d'utiliser des théorèmes intermédiaires (des Lemmes)

REMARQUE 2 On omet souvent le signe $\vdash$ dans les règles.

PROPOSITION 1 *La logique minimale est incomplète pour le modèle* $\{0, 1\}$.

1.2 Logique propositionnelle intuitionniste

DÉFINITION 2
On introduit les nouveaux connecteurs & et $\vee$ et $\neg$ et $False$:

- $\vee$ représente la disjonction : ses axiomes sont :

$$Or0 :\vdash (p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q) \Rightarrow r;$$

$$Or1 :\vdash p \Rightarrow (p \vee q);$$

$$Or2 :\vdash q \Rightarrow (p \vee q).$$

- & représente la conjonction : ses axiomes sont :

$$And0 :\vdash p \Rightarrow q \Rightarrow (p\&q);$$

$$And1 :\vdash (p\&q) \Rightarrow q);$$

$$And2 :\vdash (p\&q) \Rightarrow p.$$

- $False$ représente l'absurde : son axiome est :

$$False :\vdash False \Rightarrow p.$$

- $\neg$ représente la négation : sa définition est :

$$\neg :\vdash \neg p \equiv p \Rightarrow False.$$

PROPOSITION 2 *Les connecteurs & et* $\vee$ *sont commutatifs, associatifs, distributifs l'un sur l'autre. On récupère les règles intuitives habituelles, comme par exemple :*

$$\frac{p \qquad q}{p\&q} \qquad \frac{p \Rightarrow q \qquad p \Rightarrow r}{p \Rightarrow q\&r} \qquad \frac{p_1 \Rightarrow q_1 \qquad p_2 \Rightarrow q_2}{p_1\&p_2 \Rightarrow q_1\&q_2}$$

REMARQUE 3 En logique intuitionniste, on ne peut réduire les connecteurs les uns par rapport aux autres.

REMARQUE 4 En logique intuitionniste les formules $\neg\neg p \Rightarrow p$, $p \vee \neg p$, ... ne sont pas des théorèmes . Faire attention!

1.3 Logique de Hilbert classique

Elle existe mais elle est non triviale.

2 Déduction Naturelle

Un théorème est un jugement dans lequel il n'y a pas de contexte.

2.1 Logique propositionnelle minimale

DÉFINITION 3
On a cette fois des formules à gauche du signe $\vdash$.

- Il n'y a qu'un seul axiome :

$$\Gamma, p \vdash p.$$

- Il y a deux règles : introduction et élimination :

$$\Rightarrow I : \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \Rightarrow q};$$

$$\Rightarrow E : \frac{\Gamma \vdash p \Rightarrow q \qquad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

REMARQUE 5 Avec ça, on peut prouver $\vdash p \Rightarrow q \Rightarrow p$, ...

2.2 Logique propositionnelle intuitionniste

DÉFINITION 4
On rajoute les connecteurs $\perp$, & et $\vee$:

- $\perp$ représente l'absurde, sa règle d'élimination est :

  $$\perp E : \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash p}.$$

  Il y a aussi une règle de réduction à l'absurde :

  $$\frac{\neg p, \Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash p}$$

- & représente la conjonction, il a une règle d'introduction et deux règles d'élimination :

  $$\&I : \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p\&q} \qquad \&E_g : \frac{\Gamma \vdash p\&q}{\Gamma \vdash p} \qquad \&E_d : \frac{\Gamma \vdash p\&q}{\Gamma \vdash q}$$

- $\vee$ représente la disjonction, il a deux règles d'introduction et une règle d'élimination :

  $$\vee I_g : \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q} \qquad \vee I_d : \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q} \qquad \vee E : \frac{\Gamma \vdash p \vee q \qquad \Gamma, p \vdash r \qquad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma \vdash r}$$

- et le connecteur $\neg$, il est défini par :

  $$\neg p \equiv p \Rightarrow \perp.$$

  Les règles du "*non*" sont donc:

  $$\frac{p, \Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg p} \qquad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash \neg p}{\Gamma \vdash \perp}$$

2.3 Logique propositionnelle classique, méthode des séquents

- **Les axiomes** de cette méthode sont les séquents $\Gamma \Rightarrow \Delta$ tels qu'il existe une formule commune à Δ et à Γ (on dit que Γ coupe Δ)

- **Les règles** : il y a une paire de règles par connecteur. Ce sont des règles dites **d'introduction**.

  $$\vee : \frac{\Gamma, \mathbf{F} \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \mathbf{G} \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{F} \vee \mathbf{G} \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F}, \mathbf{G}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \vee \mathbf{G}}$$

  $$\wedge : \frac{\Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{G} \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{F} \wedge \mathbf{G} \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{G}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \wedge \mathbf{G}}$$

  $$\rightarrow : \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \qquad \Gamma, \mathbf{G} \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G} \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{F} \Rightarrow \Delta, \mathbf{G}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}}$$

  $$\neg : \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{F}}{\Gamma, \neg\mathbf{F} \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{F} \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\mathbf{F}}$$

REMARQUE 6 Ceci est une méthode de résolution, il ne s'agit en rien d'une définition de la logique classique.

2.4 Logique des prédicats

On ajoute des deux connecteurs $\forall$ et $\exists$ dont les définitions suivent :

"quel que soit" : $(g)(\gamma) : \dfrac{\Gamma, A[t], \forall x \ A[x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \ A[x] \Rightarrow \Delta}$ $(d)(\delta) : \dfrac{\Gamma \Rightarrow A[a], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x \ A[x], \Delta}$

"il existe" : $(g)(\delta) : \dfrac{\Gamma, A[a] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \ A[x] \Rightarrow \Delta}$ $(d)(\gamma) : \dfrac{\Gamma \Rightarrow A[t], \exists x \ A[x]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \ A[x]}$

où t est un terme quelconque et a une constante d'individu "inédite".

REMARQUE 7 Les règles δ sites "passives" sont à utiliser avant les règles γ dites "actives".