Modèles de calcul, TD numéro 3
Natacha Portier
vendredi 2 mars 2001

Rappel : Un système de programmation est une liste $\Phi_0, \Phi_1, ...$ qui inclut toutes les fonctions partiellement récursives d'une variable de N. Un système de programmation est universel s'il existe une fonction partielle récursive Φ_{univ} telle que $\Phi_{univ}(< i, x >) = \Phi_i(x)$ pour tout i et tout x. Cette fonction est appelée fonction universelle partielle récursive. Un système de programmation universel est acceptable s'il vérifie le théorème $s - m - n$.

Théorème $s-m-n$: Il existe une fonction totale récursive s telle que pour tout i, pour tout m plus grand que 1 et n plus grand que 1, et pour tous $x_1, ..., x_m$ et $y_1, ..., y_n$,

$$\Phi_{s(i,m,x_1,...,x_m)}(y_1, ..., y_n) = \Phi_i(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n)$$

Question 1

Soit $\Phi_0, \Phi_1, ...$ un système de programmation acceptable. Montrer qu'il existe une fonction récursive $pl(i, j)$ telle que pout tous i et j l'entier $pl(i, j)$ soit un indice pour la fonction $\Phi_i + \Phi_j$.

Question 2

Théorème 1 : Un système de programmation universel est acceptable si et seulement s'il existe une fonction totale récursive c telle que $\Phi_{c(i,j)} = \Phi_i \circ \Phi_j$ pour tous i et j.

Question 2.1

Montrer le sens direct.

Question 2.2

Soit $\Phi_0, \Phi_1, ...$ un système de programmation universel tel qu'il existe une fonction totale récursive c telle que $\Phi_{c(i,j)} = \Phi_i \circ \Phi_j$ pour tous i et j.

On définit les fonctions récursives P, Q et R par : $P(y) = (0, y)$, $Q(x, y) = (x + 1, y)$ pour tout x et y, $\Phi_p = P$, $\Phi_q = Q$, $R(0) = p$ et pour tout x, $R(x + 1) = c(q, R(x))$.

Montrer que pour tout x et y on a $\Phi_{R(x)}(y) = (x, y)$.

Conclure.

Question 3

Théorème du point fixe:
Soit $\Phi_0, \Phi_1, ...$ un système de programmation acceptable. Soit α une fonction récursive primitive à une variable. Alors il existe un entier i tel que $\Phi_i = \Phi_{\alpha(i)}$.

Montrer le théorème.

Question 4

Les fonctions booléennes peuvent s'exprimer en fonction de ET, OU et NON.

Question 4.1

Montrer qu'on peut utiliser seulement ET et NON.

Question 4.2

On définit les connecteurs NOU et NET par $NOU(x, y) = \neg(x \vee y)$ et $NET(x, y) = \neg(x \wedge y)$. Montrer que toute fonction booléenne peut s'exprimer avec NOU seulement. Le montrer pour NET.

Question 4.3

Montrer qu'il n'y a pas de connecteur binaire à part ces deux qui permette de tout exprimer (sans utiliser les fonctions constantes VRAI ni FAUX).

Question 5

Une fonction booléenne croissante F est une fonction qui a la propriété suivante: si on change une des valeurs de l'entrée de $VRAI$ à $FAUX$, la valeur de la fonction ne peut pas changer de $FAUX$ à $VRAI$. Montrer qu'une fonction est croissante si et seulement si elle peut s'exprimer par un circuit qui n'utilise que des portes ET et OU, et les fonctions constantes VRAI et FAUX.

Question 6

Nous allons montrer qu'il existe une fonction partiellement récursive qui ne peut pas être prolongée en fonction récursive totale.

Question 6,1 (méthode JM)

Soit $A = \{i \mid \phi_i(0) = 0\}$ et $B = \{i \mid \phi_i(0) = 1\}$. Montrer que ces ensembles sont récursivement inséparables.

Question 6,2

Soit ϕ la fonction définie sur $A \cup B$ qui vaut 0 sur A et 1 sur B. Montrer qu'elle est partiellement récursive et ne peut pas être prolongée en fonction récursive totale.

Question 6,3 (méthode PK)

Soit ϕ la fonction définie sur l'ensemble des numéros de machine de Turing dont le calcul s'arrête sur l'entrée 0, et telle que pour tout entier i la machine de Turing numéro i s'arrête sur l'entrée 0 après $\phi(i)$ pas de calcul.

Montrer que cette fonction est partiellement récursive et ne peut pas être prolongée en fonction récursive totale.

Question 6,4 (méthode MD)

Soit $\varphi(i) = \phi_i(i) + 1$. Montrer que cette fonction est partiellement récursive et ne peut pas être prolongée en fonction récursive totale.

Question 7

Soit $\Phi_0, \Phi_1, ...$ un système de programmation acceptable.
Soit $A = \{j | \exists x \Phi_j(x) = j\}$.

Question 7,1

On dit qu'un ensemble d'entiers E préserve les fonctions si pour tout entier i et j, si i appartient à E et $\Phi_i = \Phi_j$ alors j appartient à E. Est-ce que A préserve les fonctions ?

Question 7,2

Est-ce que A est récursif?

Question 7,3

Est-ce que A est récursivement énumérable?

Question 8

Soit $\Phi_0, \Phi_1, ...$ un système de programmation acceptable.

Question 8,1

Montrer qu'il existe une solution à l'équation :

$$\forall x \Phi_j(x) = \begin{cases} 2\Phi_x(x) + 1 & \text{si } x > 3j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 8,2

Soit j la solution de l'équation et $A = \{x \mid \Phi_j(x) \text{ diverge}\}$. Est-ce que A est récursivement énumérable ?

Question 9

Soit $\Phi_0, \Phi_1, ...$ un système de programmation acceptable. Soit f une fonction de N dans N bijective et récursive totale.

Question 9,1

L'équation suivante a-t-elle une solution ?

$$\Phi_j(x) = \begin{cases} \Phi_{f(x)}(j) & \text{si } f(j) > j \\ \Phi_x(f(j)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 9,2

Soit j une solution de l'équation précédente. Soit $A = \{x | \Phi_j(x) \text{ diverge}\}$. Est-ce que A est récursivement énumérable ?