Modèles de calcul, TD numéro 5
Natacha Portier
vendredi 23 mars 2001

Question 1

Les machines considérées travaille sur un demi-ruban. Définissons le problème $ACCEPTE-SUR-PLACE$ comme l'ensemble des couples (machine de Turing M, mot x) tels que M accepte l'entrée x sans quitter les $|x|+1$ premiers symboles de son ruban. Montrer que ce problème est ESPACE-P-complet.

Question 2

Le problème $DIVERGE-SUR-PLACE$ est l'ensemble des machines de Turing M qui ont un calcul divergent qui utilise seulement les $|M|$ premiers symboles du ruban ($|M|$ est la taille de la description de la machine).Montrer que ce problème est ESPACE-P, puis qu'il est ESPACE-P-complet en utilisant une réduction du problème précédent.

Question 3 : Problèmes périodiques

Définitions

Considérons une instance de SAT : un ensemble de n clauses $\{C_1, ..., C_n\}$ qui utilisent les variables $\{x_1, ..., x_m\}$ et $\{x_1^{+1}, ..., x_m^{+1}\}$. Nous lui associons un ensemble infini de variables $\{x_1^i, ..., x_m^i | i \in \mathbf{Z}\}$ et un ensemble infini de clauses $\{C_1^i, ..., C_n^i | i \in \mathbf{Z}\}$ telles que pour tout entier i et tout entier j compris entre 1 et n :

$$C_j^i(x_1^i, ..., x_m^i, x_1^{i+1}, ..., x_m^{i+1}) = C_j(x_1, ..., x_m, x_1^{+1}, ..., x_m^{+1})$$

Par exemple à

$$\begin{cases} x_1 \vee \neg x_2^{+1} \\ x_1 \vee x_2 \end{cases}$$

nous associons

$$\left\{\begin{array}{c} \dots \\ x_1^{i-1} \vee \neg x_2^i \\ x_1^{i-1} \vee x_2^{i-1} \\ x_1^i \vee \neg x_2^{i+1} \\ x_1^i \vee x_2^i \\ x_1^{i+1} \vee \neg x_2^{i+2} \\ x_1^{i+1} \vee x_2^{i+1} \\ \dots \end{array}\right.$$

Cet ensemble infini de clauses est satisfiable s'il existe une valuation sur l'ensemble des variables (i.e. une fonction de $\{x_1^i, ..., x_m^i | i \in \mathbf{Z}\}$ dans $\{0; 1\}$) qui satisfasse toutes les clauses. Cette valuation v est de période p si pour tous i et j elle vérifie $v(x_j^i) = v(x_j^{i+p})$.

Un ensemble de n clauses des variables $\{x_1, ..., x_m\}$ et $\{x_1^{+1}, ..., x_m^{+1}\}$ est dans $SAT - PERIODIQUE$ si l'ensemble infini de clauses associé est satisfiable.

Nous fixons pour la question suivante un ensemble de n clauses $\{C_1, ..., C_n\}$ qui utilisent les ensembles de variables $\{x_1, ..., x_m\}$ et $\{x_1^{+1}, ..., x_m^{+1}\}$ et nous considérons les ensembles périodiques associés $\{x_1^i, ..., x_m^i | i \in \mathbf{Z}\}$ et $\{C_1^i, ..., C_n^i | i \in \mathbf{Z}\}$.

Question 3,1

Montrer que si $\{C_1^i, ..., C_n^i | i \in \mathbf{Z}\}$ est satisfiable alors il l'est par une valuation de période au plus exponentielle en m.

Question 3,2

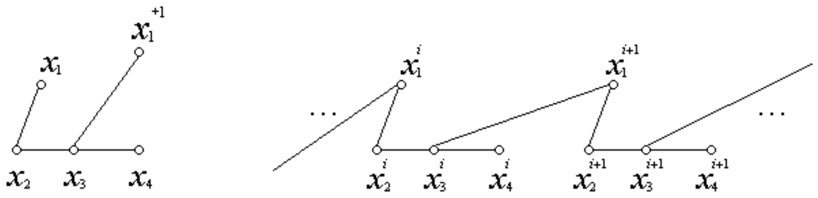
Montrer que $SAT - PERIODIQUE$ est ESPACE-P.

Question 3,3

Montrer que $SAT - PERIODIQUE$ est ESPACE-P-complet en utilisant $DIVERGE-SUR-PLACE$. On pourra s'inspirer de la preuve du théorème de Cook.

Définitions

Définissons maintenant un graphe périodique. Soit G un graphe fini non orienté dont les sommets sont $\{x_1, ..., x_m\}$ et $\{x_1^{+1}, ..., x_m^{+1}\}$. Le graphe périodique associé est un graphe dont les sommets sont $\{x_1^i, ..., x_m^i | i \in \mathbf{Z}\}$ et dont les arcs sont $\{(x_j^i, x_k^i)|i \in \mathbf{Z}$ et (x_j, x_k)est une arête de $G\} \cup \{(x_j^i, x_k^{i+1})|i \in \mathbf{Z}$ et (x_j, x_k^{+1})est une arête de $G\}$.



Un tel graphe infini est k-coloriable s'il existe une fonction de l'ensemble de ses sommets dans $\{1; ...; k\}$ (ensemble des couleurs) telle que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur. Cette coloration f est de période p si pour tous i et j elle vérifie $f(x_j^i) = f(x_j^{i+p})$.

Un graphe de sommets $\{x_1, ..., x_m\}$ et $\{x_1^{+1}, ..., x_m^{+1}\}$ avec un entier k est dans $GRAPHE-PERIODIQUE-COLORIABLE$ si le graphe infini périodique associé est k-coloriable.

Question 4,1

Montrer que $GRAPHE-PERIODIQUE-COLORIABLE$ est ESPACE-P.

Question 4,2

Montrer que $GRAPHE-PERIODIQUE-COLORIABLE$ est ESPACE-P-complet. On pourra s'inspirer du cas non-périodique (cf annexe ci-dessous) en définissant et démontrant soigneusement les analogues pour le cas périodique.

Annexe

Lemme 1 : $NAE-SAT$ est NP-dur.

Un ensemble de clauses avec trois littéraux (variable ou négation de variable) par clause est dans $NAE-SAT$ s'il existe une valuation telle que chaque clause a au moins un littéral vrai et au moins un littéral faux.

Idée de la preuve : Par réduction de $3-SAT$. Á chaque clause $c = a_1 \vee a_2 \vee a_3$ nous associons deux clauses $c' = a_1 \vee a_2 \vee x$ et $c'' = \neg x \vee a_3 \vee F$ où x est une variable fraîche.

Lemme 2 : $GRAPHE-COLORIABLE$ est NP-dur.

Un couple (graphe G, entier k) est dans $GRAPHE-COLORIABLE$ s'il existe un coloriage avec k couleurs de ses sommets tel que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur. Pour montrer ce lemme nous réduisons $NAE-SAT$ à $GRAPHE-COLORIABLE$.

Idée de la preuve :