Partiel de *modèles de calcul et complexité*
Natacha Portier
le 30 mars 2001

**Notes de cours et de TD autorisées**
**Rédaction soignée indispensable !**

## Question 1

Donner un algorithme de Markov qui prend en entrée un entier $n$ écrit en binaire et calcule $\lceil n/2 \rceil$. Commenter l'algoritme pour expliquer son fonctionnement.

## Question 2

Soit $\Phi_0, \Phi_1, ...$ un système de programmation acceptable.

## Question 2,1

Montrer qu'il existe une solution à l'équation :

$$\forall x \Phi_j(x) = \begin{cases} 2\Phi_x(x) + 1 & \text{si } \ x > 3j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Question 2,2

Soit $j$ la solution de l'équation et $A = \{x \mid \Phi_j(x) \text{ diverge}\}$. Est-ce que $A$ est récursivement énumérable ?

## Question 3

Soit $(\phi_i)$ un système de programmation acceptable qui a un programme universel. Soit $\varphi(i) = \phi_i(i) + 1$. Montrer que cette fonction est partiellement récursive et ne peut pas être prolongée en fonction récursive totale.

### Question 4

Un processus est un graphe orienté $G = (S, A)$ dont les sommets sont appelés *états* et les arcs *transitions*. Un *système de processus de communications* est un ensemble de processus $\{G_1 = (S_1, A_1), ..., G_n = (S_n, A_n)\}$ où les $S_i$ sont disjoints, ainsi qu'un ensemble $P = \{\{a_1, a'_1\}, ..., \{a_m, a'_m\}\}$ de paires de transitions, appelées *paires communicantes*. Pour tout $i$, il existe $j$ et $k$ différents tels que $a_i \in A_j$ et $a'_i \in A_k$.

L'ensemble des états du système est $S = S_1 \times ... \times S_n$. La *relation de transition* $T$ entre deux états est définie par : $(b_1, ..., b_n)T(c_1, ..., c_n)$ si et seulement si ces uples sont égaux sauf en deux indices $i$ et $j$ différents tels que $\{(b_i, c_i), (b_j, c_j)\}$ soit un élément de $P$.

Un état est bloquant s'il ne peux plus évoluer.

### Question 4,1

Donner un exemple non trivial avec un état bloquant.

Le problème du $BLOCAGE$ est l'ensemble des couples (système de processus de communications, état initial $i$) tels que $i$ puisse évoluer vers un état bloquant.

### Question 4,2

Montrer que ce problème est ESPACE-P-complet (on pourra utiliser par exemple $ACCEPTE - SUR - PLACE$).

### Question 5,1 : circuits booléens

Expliquer comment ajouter 1 de manière naïve (méthode de l'école primaire) à un nombre écrit en binaire. Donner la taille et la profondeur des circuits.

### Question 5,2

Paralléliser l'opération précédente pour diminuer la profondeur du circuit et estimer asymptotiquement la taille et la profondeur du nouveau circuit.