Probabilités et applications à l'algorithmique
TD numéro 10 : processus de branchement : Galton-Watson
Natacha Portier
vendredi 4 mai 2001

Question 1 : chaîne de Markov homogène avec bruit blanc

Soit $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans un espace arbitraire F. Soit E un ensemble dénombrable et $f : E \times F \to E$ une fonction. Soit X_0 une variable aléatoire à valeur dans E indépendante des $\{Z_n\}_{n\geq 1}$. Montrer que la relation de récurrence suivante définit une chaine de Markov homogène :

$$X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$$

Question 2 : somme aléatoire de variables aléatoires i.i.d.

Soit $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs entières et dont la fonction génératrice est g_Y. Soit T une variable aléatoire à valeurs entières indépendante des $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ et de fonction génératrice g_T. Calculer la fonction génératrice de :

$$X = \sum_{n=1}^{T} Y_n$$

En déduire l'espérance de X en fonction de celles de T et des Y_n.

Question 3 : Graphe d'une fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Soit $g : [0;1] \to \mathbf{R}$ un fonction définie par $g(x) = E[x^X]$.

Question 3,1

Montrer que g est croissante et convexe. Montrer en outre que si $P(X = 0) < 1$ alors g est strictement croissante et si $P(X \leq 1) < 1$ alors g est strictement convexe.

Question 3,2

Supposons $P(X \leq 1) < 1$. Montrer que si $E[X] \leq 1$ alors l'équation $g(x) = x$ a pour unique solution 1 dans $[0;1]$. Montrer que si $E[X] > 1$ alors l'équation a deux solutions dans $[0;1]$: $x = 1$ et $x = x_0 \in]0;1[$.

Question 4,1 : cas général

Soit $\{Z_n^{(j)}\}_{n\geq 1, j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs entières de foncttion génératrice g. Soit $Z_n = (Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}, \dots)$ et X_n les variables définies par $X_0 = 1$ et la relation de récurrence suivante :

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Z_{n+1}^k$$

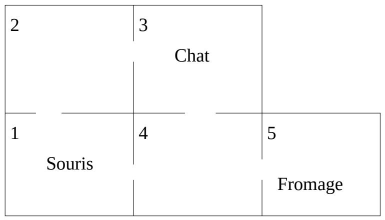
Calculer la fonction génératrice du nombre X_n d'individus de la génération n et discuter de la probabilité d'extinction.

Question 4,2 : pourquoi la loi vient de changer

On suppose le nombre d'enfants mâles par homme dans la population française donné par la fonction génératrice suivante : $g_Z(x) = 0,3 + 0,5x + 0,18x^2 + 0,02x^3$ Quelle est la probabilité d'extinction d'un nom de famille issu d'un ancêtre commun ?

Question 5 : le chat qui mange la souris qui mange le fromage

Si à l'instant t la souris est dans une pièce avec k portes alors au temps suivant $t + 1$ elle se trouve équiprobablement dans une des k pièces voisines. Si elle se trouve dans la pièce du fromage elle le mange. Le chat est assez pareseux pour ne pas bouger de sa chambre mais assez gourmand pour manger la souris dès qu'il se retrouve dans la meme pièce qu'elle. Partant de la configuration suivante quelle est la probabilité que la souris mange le fromage ?



Question 6 : un jeu de tennis

On considère un jeu classique du tennis (pas un jeu décisif) de Daniel contre Olivier. C'est à Olivier de servir. Il gagne chaque point avec probabilité p. Modéliser par une chaîne de Markov et donner la probabilité d'Olivier de gagner le jeu.