Probabilités et applications à l'algorithmique, TD numéro 8

Natacha Portier
vendredi 20 avril 2001

Question 1 : pourquoi les cosmonautes ne doivent pas boire de vodka

Soit $S = \mathbf{Z}^k$ l'espace des états. Le point $y = (x_1, ..., x_{j-1}, x_j \pm 1, x_{j+1}, ..., x_k)$ est dit voisin de $x = (x_1, ..., x_k)$. La probabilité de transition d'un état x à un état voisin y est $p_{xy} = 1/2k$.

Question 1,1

Donner la probabilité de revenir à son point de départ en $2n$ coups.

Question 1,2

Calculer le maximun c_n de $n!/(n_1!...n_k!)$ quand $n_1 + ... + n_k = n$.

Question 1,3

L'état 0 est-il transitoire ou persistant ?

Question 2 : bruit qui court

Les notes de cours seront-elles autorisées à l'examen ? La réponse est transmise à travers n intermédiaires. On suppose que chaque éttudiant transmet le message de façon correcte avec une probabilité p telle que $0 < p < 1$ ou le déforme en son contraire avec probabilité $1 - p$; les intermédiaires sont indépendants.

Modéliser cette situation par une chaîne de Markov a deux états et calculer la probabilité que l'information transmise par le n-ième intermédiaire soit conforme à l'information initiale. Que se passe-t-il quand $n \to \infty$?

Question 3 : joyeuses pâques

La nouvelle série de figurines «castors chinois» présentes dans les oeufs en chocolat comporte 4 personnages différents. On note T le nombre d'oeufs à acheter pour obtenir la collection complète.

Question 3,1

Représenter le processus par une chaine de Markov.

Question 3,2

Établir la matrice de transition. Calculer le vecteur de la distribution de probabilité à la troisième transition.

Question 3,3

Calculer l'espérance et la variance de T.

Question 4 : Le Bon, la Brute et le Truand

Le Bon, la Brute et le Truand règlent leurs comptes dans le cimetière. Ils sont prêts à dégainer, chacun contre les autres. Le Bon est sûr d'atteindre sa cible, le Truand a huit chances sur dix alors que la Brute, qui a le soleil dans les yeux, a une chance sur deux. Ils tirent à tour de rôle dans un ordre fixe déterminé au par le hasard au début du duel. Chacun tire sur celui qui présente le plus de danger. le «duel» cesse lorsqu'il n'y a plus qu'un seul survivant.

Question 4,1

Représenter le processus par une chaîne de Markov.

Question 4,2

Calculer la probabilité de survie de chaque protagoniste.