Probabilités et applications en algorithmique

Pascal Koiran

Durée de l'examen : 3 heures

Seules les notes de cours et de TD sont autorisées.

14 mai 2001

1 Coloriage

Soit $\mathcal{A}$ une famille de n parties d'un ensemble Ω de cardinal n. On a vu en cours qu'il existe un "coloriage" $\chi : \Omega \to \{-1, 1\}$ tel que $\text{disc}(\chi) \leq \sqrt{2n \ln(2n)}$.

1. Proposez un algorithme probabiliste de coloriage. Il devra fonctionner en temps polynomial et retourner avec probabilité $1 - O(1/n)$ un coloriage χ tel que $\text{disc}(\chi) \leq \sqrt{4n \ln(2n)}$.
2. Même question avec une borne $O(1/2^n)$ sur la probabilité d'échec de l'algorithme à la place de $O(1/n)$.

2 Chaînes de Markov

Dans cette section on étudie des marches au hasard sur le segment de droite $\{0, 1, \ldots, n\}$. Soient p et q des réels strictement positifs de somme 1. On appelle "chaîne de Markov de paramètre p" une chaîne de Markov dont les probabilités $p_{i,j}$ de transition de l'état i vers l'état j vérifient les propriétés suivantes : $p_{i,i-1} = p$ et $p_{i,i+1} = q$ pour $1 \leq i \leq n-1$, et $p_{0,1} = 1$.

On note h_i le temps moyen d'atteinte de l'état n en partant de l'état i.

1. Etablir la relation de récurrence satisfaite par les h_i. Quelles sont les conditions aux limites ?
2. Dans cette question on suppose que $p = 2/3$. Calculez h_i. Donner un équivalent de h_0 quand n tend vers l'infini.
3. Même question avec $p = 1/3$.
4. Proposez un algorithme probabiliste simple pour le problème 3SAT (on pourra supposer que dans chaque clause de l'instance de 3SAT apparaissent exactement trois variables distinctes). On analysera cet algorithme à l'aide d'une marche au hasard de paramètre p pour une valeur de p à déterminer. Le résultat est-il surprenant ?

3 Bornes de Chernoff

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes telle que $X_i = 1$ avec probabilité p_i et $X_i = 0$ avec probabilité $1 - p_i$. Soit $X = \sum_{i=1}^n X_i$, μ l'espérance de X et $\delta > 0$. On a vu en cours sans démonstration l'inégalité

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left[\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{(1+\delta)}}\right]^\mu. \tag{1}$$

Le but de cette partie est de démontrer cette inégalité.

1. Montrez que
$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \frac{\prod_{i=1}^n [1 + p_i(e^t - 1)]}{\exp(t(1+\delta)\mu)}$$
pour tout $t > 0$.
2. Obtenir ensuite une borne sur $\Pr[X \geq (1+\delta)\mu]$ qui dépend uniquement de δ, μ et t. On utilisera l'inégalité $1 + x \leq e^x$, valable pour tout réel x.
3. Conclure en choisissant pour t une valeur "judicieuse" qu'on précisera.

4 Combinatoire

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté sur un ensemble de $n = |V|$ sommets. Un élément de l'ensemble E des arêtes est donc une paire $\{v, w\}$ d'éléments distincts de V. On note d_v le degré d'un sommet $v \in V$.

1. Soit $<$ un ordre aléatoire choisi suivant la distribution uniforme sur les $n!$ ordre totaux sur V. On pose
$$I = \{v \in V;\ \forall w\ (\{v, w\} \in E \Rightarrow v < w)\}.$$
Montrez que l'espérance de $|I|$ est égale à $\sum_{v \in V} \frac{1}{d_v+1}$.
Indication : on pourra exprimer $|I|$ sous la forme d'une somme de variables aléatoires.
2. On rappelle qu'un ensemble $X \subseteq V$ est indépendant s'il n'existe aucune arête entre sommets de X. On note $\alpha(G)$ le cardinal du plus grand ensemble indépendant de G. Comparez $\alpha(G)$ à $\sum_{v \in V} \frac{1}{d_v+1}$.
3. Etant donnés deux entiers m et n, à quelle condition existe t-il un graphe G sur n sommets tel que
$$m = \alpha(G) = \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}.$$
4. Cette question est indépendante des précédentes.
Soient n et k deux entiers strictement positifs tels que $\binom{n}{k} < 2^{\binom{k}{2}-1}$. Montrez qu'il existe un graphe sur n sommets qui ne contient aucun ensemble indépendant de cardinal k, ni aucune clique de cardinal k (on rappelle qu'une clique est un ensemble de sommets tels que le sous-graphe induit est le graphe complet).