Probas : lois usuelles

Laure Danthony

1 La loi discrète uniforme

Soit $n > 0$ fixé. On appelle **loi discrète uniforme** la loi suivie par la variable aléatoire X dont les valeurs possibles sont les entiers successifs $1, 2, \dots n$ auxquels sont attachées des probabilités égales :

$$P(X = a) = \frac{1}{n}, A = [\![1, n]\!]$$

RÉSULTATS :

- $E(X) = \sum_{a \in A} aP(X = a) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$
- $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{(n+1)^2}{4}\right)$, soit :
  $Var(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$
- $g_X(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} u^n = \frac{u}{n} \frac{u^n - 1}{u - 1}$

REMARQUE 1 Cette loi avec $n = 6$ correspond à celle du lancer de dé.

2 La loi binômiale

La **loi binômiale** de paramètres n et p est la loi du nombre total de réalisations d'un événement A au cours de n épreuves *identiques indépendantes* où A a la propriété p d'être réalisé :

$$P\big(\mathcal{B}(n,p) = k\big) = \mathrm{C}_n^x p^k (1-p)^{n-k}, A = [\![1, n]\!]$$

RÉSULTATS :

- $E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^k = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^k$, soit :
  $E(X) = np \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^k = np \sum_{k'=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{k'} p^{k'} (1-p)^{n-1-k'} = np$

- $E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^k = \ldots = n^2p^2 + np - np^2$
  d'où $V(X) = np(1-p)$
- $g_X(u) = (1-p+pu)^n$ $(\rho = \infty)$
- Si $n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $p \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ de sorte que $np \underset{+\infty}{\longrightarrow} m$ finie, alors :
  $\forall k, \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^k \to \dfrac{\mathrm{e}^{-m} m^k}{k!}$(Loi de Poisson).

Remarque 2 Une urne contenant N boules dont une proportion p est constituée de boules blanches. On prélève dans cette urne *avec remise.*

3 Variable de Bernoulli

C'est un cas particulier de la loi binômiale avec $n = 1$:

$$P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}.$$

La variable binômiale $\mathcal{B}(n,p)$ est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes $\mathcal{B}(1,p)$ et donc :

- $E(X) = p$
- $V(X) = p(1-p)$
- $g_X(u) = 1 - p + pu$ $(\rho = +\infty)$.

4 Loi géométrique

C'est par exemple la probabilité de gagner à la k-ième réussite, si la probabilité de gagner à une réussite est p :

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$$

Résultats :

- $E(X) = \dfrac{1}{p}$
- $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$
- $g_X(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} pq^{k-1} = \ldots = \dfrac{pu}{1-qu}$ $(\rho = \dfrac{1}{1-p})$

5 Loi de Poisson

On appelle **variable de Poisson** de paramètre m (non négatif) la variable aléatoire discrète définir sur l'ensemble des entiers de $\mathbb{N}$ par :

$$m \geq 0, P(X = k) = \frac{\mathrm{e}^{-m} m^k}{k!}, A = \{0, 1, \dots\}$$

Résultats :

- $E(X) = m$
- $V(X) = m$
- $g_X(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-m} m^k u^k}{k!} = \mathrm{e}^{m(u-1)}$ $(\rho = +\infty)$.