Partiel : Probabilités et applications à l'algorithmique
Natacha Portier
vendredi 30 mars 2001

Notes de cours et de TD autorisées
Rédaction soignée indispensable !

Question 1

Considérons un graphe complet non orienté à n sommets. Montrer qu'il est possible d'orienter les arêtes de manière à avoir $n!/2^{n-1}$ chemins hamiltoniens orientés.

Question 2

Figaro a deux coiffeuses, Rose et Marie. Le nombre de clientes de Rose et le nombre de clientes de Marie sont indépendants et suivent une loi de Poisson de moyennes respectives λ et μ.

Question 2,1

Calculer le nombre moyen de clientes au total.

Question 2,2

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre total de clientes.

Question 2,3

Donner sa variance.

Question 3

Pascal fait des réussites. Il gagne une partie avec la probabilité $p \in]0;1[$. Il s'arrête dès qu'il a gagné. Il bat les cartes entre deux parties de manière à ce que chaque réussite soit indépendante.

Question 3,1

Soit n un entier strictement positif. Calculer la probabilité pour que Pascal s'arrête après avoir joué exactement n parties.

Question 3,2

Soit T la variable aléatoire représentant le nombre total de parties jouées. Montrer qu'elle n'a pas de mémoire, c'est-à-dire que pour tous les entiers n et n_0 :

$$P(T \geq n_0 + n | T > n_0) = P(T \geq n)$$

Question 4

À l'Alpe d'Huez, un groupe de 28 skieurs fait une pause déjeuner dans une crêperie. Le cidre coule à flots et à la sortie chacun reprend une paire de ski au hasard parmi les 28. Quelle est la probabilité pour que personne n'ait sa propre paire ? Donner l'expression sans faire le calcul numérique.

Question 5 : entropie

Les deux questions suivantes sont indépendantes. La base logarithmique utilisée pour le calcul de l'entropie est quelconque.

Question 5,1

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1, ..., x_n$ avec la distribution finie de probabilités $p = (p_1, ..., p_n)$ et Y une variable aléatoire indépendante de X qui prend les valeurs $y_1, ..., y_l$ avec la distribution finie de probabilités $q = (q_1, ..., q_l)$. On appelle $p \otimes q$ la distribution de probabilité du couple (X, Y). Calculer l'entropie de $p \otimes q$ en fonction de celles de p et q.

Question 5,2

Soit $p = (p_1, p_2)$ une distribution finie de probabilités. Donner les valeurs de p qui minimisent et maximisent son entropie H. Généraliser à une distribution $p = (p_1, ..., p_n)$. (par convention , $H(p_1, ..., p_{n-1}, 0) = H(p_1, ..., p_{n-1})$).

Question 6 : bon appétit

En Belgique on mange deux types de frites : les frites traditionnelles à section rectangulaire et les frites new-look à section hexagonale. Parmi les frites que consomment les Flamands il y a 65% de frites traditionnelles alors que les Wallons en mangent 75%. L'équipe de Belgique de football est composée de 7 Flamands et de 4 Wallons. Un joueur est surpris à la mi-temps avec un cornet de frites hexagonales. Calculer la probabilité pour qu'il soit flamand.