

# Réécriture

## Présentation

### 1 Qu'est-ce que la réécriture ?

La réécriture<sup>1</sup> est la théorie de la simplification qui sert

- en **calcul symbolique**,
- en **sémantique**, la valeur d'une expression est son résultat par évaluation, (il y a des liens avec le lambda-calcul),
- en **démonstration automatique**, (il faut «simplifier» à tour de bras!)

### 2 Un exemple : les groupes

#### 2.1 Les axiomes

Considérons les trois équations de l'axiomatique faible des groupes, on note  $*$  le produit,  $e$  l'élément neutre et  $\bar{x}$  l'inverse de  $x$ .

$$\begin{aligned}x * e &= x \\x * \bar{x} &= e \\(x * y) * z &= x * (y * z)\end{aligned}$$

On veut prouver que  $e * x = x$ , c-a-d «un élément neutre à droite est aussi neutre à gauche!»

#### 2.2 Un sens pour les égalités

«Pour s'y retrouver», on utilise des «flèches», pour orienter les équations,

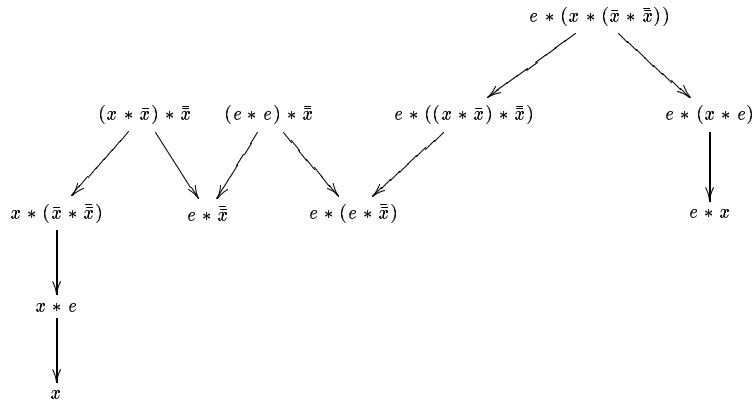
$$\begin{aligned}x * e &\longrightarrow x \\x * \bar{x} &\longrightarrow e \\(x * y) * z &\longrightarrow x * (y * z)\end{aligned}$$

Peut-être que la flèche est une «**simplification**» ?

---

<sup>1</sup>Les puristes disent et écrivent la «réécriture».

### 2.3 Démonstration de $e * x = x$



### 3 Des questions à se poser

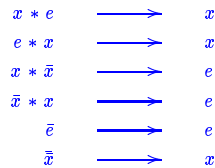
- Plusieurs simplifications possibles? Des termes comme
  - $e * (x * (\bar{x} * \bar{x}))$
  - ou  $(e * e) * \bar{x}$
  - ou  $(x * \bar{x}) * \bar{x}$

se réécrivent de plusieurs manières, ils posent un problème pour un simplifieur : en effet, est-on sûr que  $e * (x * (\bar{x} * \bar{x})) \longrightarrow e * ((x * \bar{x}) * \bar{x})$  simplifie quelque chose?

**Exercice :** Prouver  $e = \bar{x} * x$ . On pourra regarder dans le *All that* p. 5.

- Y a-t-il une seule forme simplifiée?
- Comment orienter les équations?
- Le processus de simplification se termine-t-il?
- Comment le démontre-t-on?
- Sait-on résoudre les équations dans les termes?
- Peut-on calculer un système pour la simplification dans les groupes? Quitte à ajouter de nouvelles règles?

### 4 Un «système de simplification» pour les groupes



$$\begin{array}{lcl}
x \bar{*} y & \longrightarrow & \bar{y} * \bar{x} \\
(x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) \\
x * (\bar{x} * y) & \longrightarrow & y \\
\bar{x} * (x * y) & \longrightarrow & y
\end{array}$$

## 5 Associativité et Endomorphisme

Considérons les deux règles :

$$\begin{array}{lcl}
(x * y) * z & = & x * (y * z) \quad \text{(A)} \\
f(x * y) & = & f(x) * f(y) \quad \text{(E)}
\end{array}$$

– Une **première** façon de simplifier :

$$\begin{array}{lcl}
(x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) \quad \text{(A)} \\
f(x * y) & \longrightarrow & f(x) * f(y) \quad \text{(E)}
\end{array}$$

– Une **deuxième** façon de simplifier :

$$\begin{array}{lcl}
(x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) \quad \text{(A)} \\
f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) \quad \text{(E)} \\
f(x * y) * z & \longrightarrow & f(x) * (f(y) * z) \quad \text{(EA)}
\end{array}$$

$f(x * y)$  est plus lourd que  $f(x)$ , donc  $f(x * y) * z$  penche plus à gauche que  $f(x) * (f(y) * z)$ .

C'est une bonne idée pour orienter l'associativité!

**Remarque** Dans la **deuxième** façon de simplifier, on doit ajouter les règles :

$$\begin{array}{lcl}
(x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) \quad \text{(A)} \\
f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) \quad \text{(E)} \\
f(x * y) * z & \longrightarrow & f(x) * (f(y) * z) \quad \text{(EA)} \\
f^2(x * y) * z & \longrightarrow & f^2(x) * (f^2(y) * z) \quad \text{(2EA)} \\
f^3(x * y) * z & \longrightarrow & f^3(x) * (f^3(y) * z) \quad \text{(3EA)} \\
& & \vdots \\
f^n(x * y) * z & \longrightarrow & f^n(x) * (f^n(y) * z) \quad \text{(nEA)} \\
& & \vdots
\end{array}$$

**HUM!**

– Une **troisième** façon de simplifier :

$$\begin{array}{lcl}
(x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) \quad \text{(A)} \\
f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) \quad \text{(E)} \\
f(x) * (f(y) * z) & \longrightarrow & f(x * y) * z \quad \text{(EA)}
\end{array}$$

Il va falloir comprendre tout ça!

## 6 Bibliographie

- F. Baader et T. Nipkow. **Term Rewriting and All That**. Cambridge University Press, 1998.
- Ch. Hankin : **Lambda Calculi : a Guide for Computer Scientists**, Oxford U. Press, 1994.

Visitez ma page web!

[www.ens-lyon.fr/~plescann/ENSEIGNEMENT/REECRITURE/presentation.html](http://www.ens-lyon.fr/~plescann/ENSEIGNEMENT/REECRITURE/presentation.html)

et celle de Laure Danthony... [www.ens-lyon.fr/~ldanthon](http://www.ens-lyon.fr/~ldanthon)