Réécriture

Présentation

1 Qu'est-ce que la réécriture ?

La réécriture[1] est la théorie de la simplification qui sert

- en calcul symbolique,
- en sémantique, la valeur d'une expression est son résultat par évaluation, (il y a des liens avec le lambda-calcul),
- en démonstration automatique, (il faut «simplifier» à tour de bras !)

2 Un exemple : les groupes

2.1 Les axiomes

Considérons les trois équations de l'axiomatique faible des groupes, on note $*$ le produit, e l'élément neutre et $\bar{x}$ l'inverse de x.

$$\begin{array}{rcl} x * e & = & x \\ x * \bar{x} & = & e \\ (x * y) * z & = & x * (y * z) \end{array}$$

On veut prouver que $e * x = x$, c-a-d «un élément neutre à droite est aussi neutre à gauche !»

2.2 Un sens pour les égalités

«Pour s'y retrouver», on utilise des «flèches», pour orienter les équations,

$$\begin{array}{rcl} x * e & \longrightarrow & x \\ x * \bar{x} & \longrightarrow & e \\ (x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) \end{array}$$

Peut-être que la flèche est une «simplification» ?

[1] Les puristes disent et ecrivent la «récriture».

2.3 Démonstration de $e * x = x$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & & & & e * (x * (\bar{x} * \bar{\bar{x}})) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & (x * \bar{x}) * \bar{\bar{x}} \arrow[dl] \arrow[dr] & & (e * e) * \bar{\bar{x}} \arrow[dl] \arrow[dr] & & e * ((x * \bar{x}) * \bar{\bar{x}}) \arrow[dl] & & e * (x * e) \arrow[d] \\
x * (\bar{x} * \bar{\bar{x}}) \arrow[d] & & e * \bar{\bar{x}} & & e * (e * \bar{\bar{x}}) & & & e * x \\
x * e \arrow[d] & & & & & & & \\
x & & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

3 Des questions à se poser

- Plusieurs simplifications possibles ? Des termes comme
  - $e * (x * (\bar{x} * \bar{\bar{x}}))$
  - ou $(e * e) * \bar{\bar{x}}$
  - ou $(x * \bar{x}) * \bar{\bar{x}}$

  se réécrivent de plusieurs manières, ils posent un problème pour un simplifieur : en effet, est-on sûr que $e * (x * (\bar{x} * \bar{\bar{x}})) \longrightarrow e * ((x * \bar{x}) * \bar{\bar{x}})$ simplifie quelque chose ?

  Exercice : Prouver $e = \bar{x} * x$. *On pourra regarder dans le* *All that* *p. 5.*
- Y a-t-il une seule forme simplifiée ?
- Comment orienter les équations ?
- Le processus de simplification se termine-t-il ?
- Comment le démontre-t-on ?
- Sait-on résoudre les équations dans les termes ?
- Peut-on calculer un système pour la simplification dans les groupes ? Quitte à ajouter de nouvelles règles ?

4 Un «système de simplification» pour les groupes

$$
\begin{array}{rcl}
x * e & \longrightarrow & x \\
e * x & \longrightarrow & x \\
x * \bar{x} & \longrightarrow & e \\
\bar{x} * x & \longrightarrow & e \\
\bar{e} & \longrightarrow & e \\
\bar{\bar{x}} & \longrightarrow & x
\end{array}
$$

$$\begin{array}{rcl} x \mathbin{\bar{*}} y & \longrightarrow & \bar{y} * \bar{x} \\ (x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) \\ x * (\bar{x} * y) & \longrightarrow & y \\ \bar{x} * (x * y) & \longrightarrow & y \end{array}$$

5 Associativité et Endomorphisme

Considérons les deux règles :

$$\begin{array}{rcll} (x * y) * z & = & x * (y * z) & \text{(A)} \\ f(x * y) & = & f(x) * f(y) & \text{(E)} \end{array}$$

– Une première façon de simplifier :

$$\begin{array}{rcll} (x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) & \text{(A)} \\ f(x * y) & \longrightarrow & f(x) * f(y) & \text{(E)} \end{array}$$

– Une deuxième façon de simplifier :

$$\begin{array}{rcll} (x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) & \text{(A)} \\ f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) & \text{(E)} \\ f(x * y) * z & \longrightarrow & f(x) * (f(y) * z) & \text{(EA)} \end{array}$$

$f(x * y)$ est plus lourd que $f(x)$, donc $f(x * y) * z$ penche plus à gauche que $f(x) * (f(y) * z)$.
C'est une bonne idée pour orienter l'associativité !

Remarque Dans la deuxième façon de simplifier, on doit ajouter les règles :

$$\begin{array}{rcll} (x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) & \text{(A)} \\ f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) & \text{(E)} \\ f(x * y) * z & \longrightarrow & f(x) * (f(y) * z) & \text{(EA)} \\ f^2(x * y) * z & \longrightarrow & f^2(x) * (f^2(y) * z) & \text{(2EA)} \\ f^3(x * y) * z & \longrightarrow & f^3(x) * (f^3(y) * z) & \text{(3EA)} \\ & \vdots & & \\ f^n(x * y) * z & \longrightarrow & f^n(x) * (f^n(y) * z) & \text{(nEA)} \\ & \vdots & & \end{array}$$

HUM !

– Une troisième façon de simplifier :

$$\begin{array}{rcll} (x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) & \text{(A)} \\ f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) & \text{(E)} \\ f(x) * (f(y) * z) & \longrightarrow & f(x * y) * z & \text{(EA)} \end{array}$$

Il va falloir comprendre tout ça !

6 Bibliographie

– F. Baader et T. Nipkow. Term Rewriting and All That. Cambridge University Press, 1998.

– Ch. Hankin : Lambda Calculi : a Guide for Computer Scientists, Oxford U. Press, 1994.

Visitez ma page web !

`www.ens-lyon.fr/~plescann/ENSEIGNEMENT/REECRITURE/presentation.html`

et celle de Laure Danthony... `www.ens-lyon.fr/~ldanthon`