Réécriture

Ordre sur les preuves

1 Rappel

$$E_\infty = \bigcup_{i\geq 0} E_i \qquad R_\infty = \bigcup_{i\geq 0} R_i$$

$$E_\omega = \bigcup_{i\geq 0} \bigcap_{j\geq i} E_j \qquad R_\omega = \bigcup_{i\geq 0} \bigcap_{j\geq i} R_j$$

Petite histoire d'une preuve

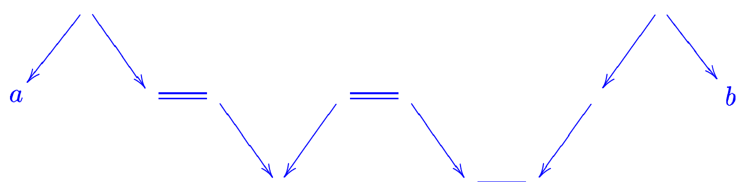
2 Les preuves de $a = b$

Considérons les preuves équationnelles possibles de l'égalité de deux termes $a = b$:

- Au niveau (E_0, R_0) (avec $R_0 = \emptyset$) c'est une preuve complètement par identités, c'est-à-dire une preuve du type :

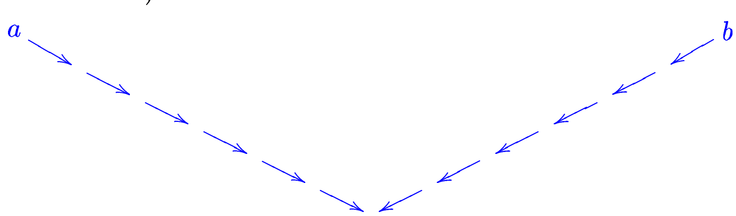
  $a = = = = = = = = = = b$

- Au niveau (E_i, R_i) pour un i quelconque, c'est une preuve hétérogène, c'est-à-dire du type :

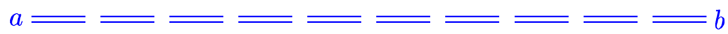
  Car certaines identités ne sont plus présentes et il faut les remplacer par des réécritures.

▶ En fait ce qu'on souhaite c'est une preuve complétement par réécriture (une preuve en vallée) :

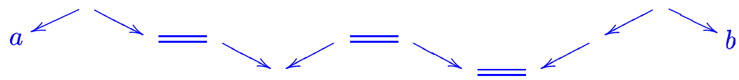


▶ On veut donc un algorithme du type :

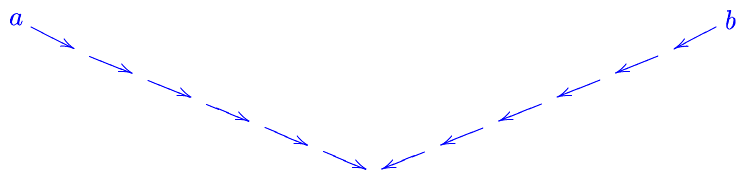
- Début :



- Milieu :



- Fin :



Buts du chapitre :

▶ Il faut montrer que pour tout couple tel que $a =_{E_0} b$, il existe un c tels que

$$a \xrightarrow[R_\omega]{*} c \xleftarrow[R_\omega]{*} b$$

La confluence de R_ω découlera de ce théorème.

▶ Il faut donc voir comment les preuves se transforment.

▶ Pour cela, on transforme chaque étape de preuve en une étape de preuve plus simple et on montre en se servant d'un ordre noethérien adéquat que le processus de transformation termine.

Un ordre sur les preuves

3 Le coût d'une preuve

Une preuve où les termes intermédiaires sont $a_1....a_i a_{i+1}...a_n$ est associée au multiensemble $\{\!\{a_1 \ \pounds_1 \ a_2, ..., a_i \ \pounds_i \ a_{i+1}, ...\}\!\}$; chaque $\pounds_i$ représentant soit $=$, soit $\rightarrow$, soit $\leftarrow$.

▶ On va attribuer à chaque preuve un coût. Pour cela on attribue un coût a chaque paire de termes . Le coût d'une preuve est le multiensemble des coûts. Le coût est donc un triplet (M, l, r). Il y a un ou deux éléments dans le multiensemblre M.

On attribue les coûts des paires de la façon suivante :

- si $a_i \pounds_i a_{i+1}$ est de la forme $a_i = a_{i+1}$, le coût est $(\{\!\{a_i, a_{i+1}\}\!\}, \_, \_)$[1],
- si $a_i \pounds_i a_{i+1}$ est de la forme $a_i \to a_{i+1}$, le coût est $(\{\!\{a_i\}\!\}, l, r)$, où l est le membre gauche de la réécriture employée et r est le membre droit de la règle de réécriture employée.
- si $a_i \pounds_i a_{i+1}$ est de la forme $a_i \leftarrow a_{i+1}$, le coût est $(\{\!\{a_{i+1}\}\!\}, l, r)$, où l est le membre gauche de la réécriture employée et r est le membre droit de la règle de réécriture employée.

4 La comparaison des coûts de paires

4.1 Rappels sur l'enchâssement

La relation d'enchâssement $\trianglerighteq$ (en anglais encompassment) est définie par

$$s \trianglerighteq t$$

si et seulement si

$$\exists p \in Pos(s) \cdot \exists \sigma \in Sub(T(\Sigma, V)) \cdot \quad s_{|p} = \sigma(t)$$

$\trianglerighteq \cap \trianglelefteq$ est $=$.
$\triangleright$ est la relation $\trianglerighteq \cap \neq$, elle termine.

4.2 La terminaison des preuves

Remarquons que les coûts ont les caractéristiques suivantes :

- Pour la première composante, c'est l'extension multiensemble de l'ordre sur les termes.
- Pour la deuxième composante, c'est l'ordre d'enchâssement.
- Pour la troisième composante, c'est l'ordre sur les termes.

Ainsi l'ordre sur les coûts termine et donc l'ordre sur les preuves termine.

4.3 Notation

L'ordre sur les preuves s'écrit :

$$\mathcal{P} \succ_C \mathcal{P}'$$

Deux preuves sont équivalentes si elles prouvent la même identité.

[1] _ signifie qu'on n'attache pas d'importance à ce champ.

5 Décroissance des preuves

On distingue les cas : les étapes non persistantes (ici), et les pics qui peuvent être remplacés par une étape plus petite.
Chaque règle fait décroître les preuves : (les notations sont les mêmes que dans le cours de complétion.

- Si la règle est Delete. Si cette règle affecte une étape $a_i \; \pounds_i \; a_{i+1}$ de la preuve alors cette étape disparaît et le coût de la preuve diminue.

$$\begin{tikzcd} a_i \arrow[r, equal] & a_{i+1} \end{tikzcd}$$

$$\Downarrow$$

$$a_i$$

- Si la règle est Compose.

$$\begin{tikzcd} a_i \arrow[r, "R_\infty"'] & a_{i+1} \end{tikzcd}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{tikzcd} a_i \arrow[dr, "R_\infty"'] & & a_{i+1} \arrow[dl, "R_\infty"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

On a donc :

- $cout(a_i \to a_{i+1}) = (a_i, s, t) > cout(a_i \to c) = (a_i, s, u)$ parce que $\{\!\{a_i\}\!\} = \{\!\{a_i\}\!\}$, $s = s$ et $t > u$,
- $cout(a_i \to a_{i+1}) > cout(c \leftarrow a_{i+1})$ parce que $\{\!\{a_i\}\!\} \gg \{\!\{a_{i+1}\}\!\}$.

- Si la règle est Simplify.

$$\begin{tikzcd} a_i \arrow[r, equal] & a_{i+1} \end{tikzcd}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{tikzcd} a_i \arrow[dr, equal] & & a_{i+1} \arrow[dl] \\ & c & \end{tikzcd}$$

On a donc :

- $cout(a_i = a_{i+1}) > cout(a_i = c)$ parce que $\{\!\{a_i, a_{i+1}\}\!\} \gg \{\!\{a_i, c\}\!\}$
- $cout(a_i = a_{i+1}) > cout(c \leftarrow a_{i+1})$ parce que $\{\!\{a_i, a_{i+1}\}\!\} \gg \{\!\{a_{i+1}\}\!\}$.

- Si la règle est Collapse.

$$
\begin{array}{c}
a_i = a_{i+1} \\
\Downarrow \\
\begin{tikzcd}[column sep=small] a_i \arrow[dr, equal] & & a_{i+1} \arrow[dl] \\ & c & \end{tikzcd}
\end{array}
$$

On a donc :

  - $cout(a_i \to a_{i+1}) = (a_i, s, t) > cout(a_i \to c) = (a_i, l, r)$ parce que $\{\!\{a_i\}\!\} = \{\!\{a_i\}\!\}$, et ou bien ou bien $s \blacktriangleright l$ ou bien $s = l$ et $t > r$.
  - $cout(a_i \to a_{i+1}) > cout(c = a_{i+1})$ parce que $\{\!\{a_i\}\!\} \gg \{\!\{c, a_{i+1}\}\!\}$.

- Si la règle est Orient.

$$
\begin{array}{c}
a_i = a_{i+1} \\
\Downarrow \\
a_i \to a_{i+1}
\end{array}
$$

On a donc :

  - $cout(a_i = a_{i+1}) > cout(a_i \to a_i)$ parce que
  - $\{\!\{a_i, a_{i+1}\}\!\} \gg \{\!\{a_i\}\!\}$.

6 Décroissance des preuves

Comment faire décroître un pic ? Trois cas peuvent se présenter :

1. il s'agit d'une paire critique non joignable,
2. il s'agit d'une paire critique joignable dans R_ω
3. il s'agit de deux règles qui s'appliquent sans superposition.

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que le pic est un pic dans R_ω, c'est-à-dire $a_{i-1} \xleftarrow[R_\omega]{} a_i \xrightarrow[R_\omega]{} a_{i+1}$.

- Cas 1 :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & a_i \arrow[dl, "R_\omega"'] \arrow[dr, "R_\omega"] & \\ a_{i-1} & & a_{i+1} \end{tikzcd}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{tikzcd} a_{i-1} \arrow[r, equal, "E_\infty"'] & a_{i+1} \end{tikzcd}$$

et on remarque que $\{\!\{a_i\}\!\} \gg \{\!\{a_{i-1}, a_{i+1}\}\!\}$

- Cas 2 et 3 : on voit que les coût décroissent.

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & a_i \arrow[dl, "R_\omega"'] \arrow[dr, "R_\omega"] & \\ a_{i-1} & & a_{i+1} \end{tikzcd}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] a_{i-1} \arrow[dr, "*", "R_\omega"'] & & a_{i+1} \arrow[dl, "*"', "R_\omega"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

En effet, $\{\!\{a_i\}\!\}$ domine toutes les étapes de réécriture de $a_{i-1} \xrightarrow{*} c \xleftarrow{*} a_{i+1}$.

7 Théorème

Théorème : Si il existe une preuve $\mathcal{P}$ dans $E_\infty \cup R_\infty$ qui n'est pas une preuve de réécriture , alors il existe dans $E_\infty \cup R_\infty$ une preuve $\mathcal{P}'$ équivalente à $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P} \succ_C \mathcal{P}'$.

►Par les résultats précédents, si la preuve $\mathcal{P}$ n'est pas une preuve par réécriture, elle se simplifie.

Corollaire:

- Si il existe une preuve $\mathcal{P}$ dans $E_\infty \cup R_\infty$, alors il existe une preuve de réécriture equivalente dans R_ω.

- R_ω est convergent, c-à-d est confluent et termine.

- Si R_ω est fini, alors le problème du mot dans E_0 est décidable.