Réécriture

Algèbres de termes

1 Domaine d'un arbre enraciné étiqueté

$\mathbb{N}_\star = \mathbb{N} - \{0\}$
Un domaine d'arbre est un sous-ensemble fini non vide D de $\mathbb{N}_\star^*$ tel que :

- $p \in D \quad \& \quad q\ \textit{\textbf{prefix}}\ p \qquad \Rightarrow \qquad q \in D$
- $pi \in D \quad \& \quad j \in \mathbb{N}_\star \quad \& \quad j < i \qquad \Rightarrow \qquad pj \in D$

Remarque : $\boxed{\text{Tout domaine contient le mot vide.}}$

2 Arbre enraciné étiqueté

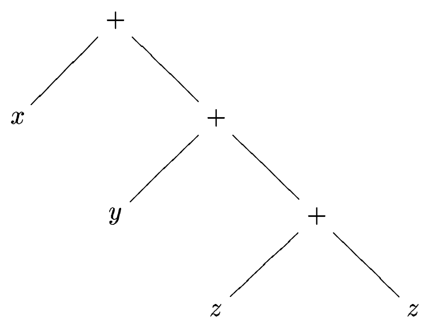
Un arbre étiqueté par A est une application $T : D \to A$:

- $T(\epsilon)$ est la racine de l'arbre.
- D est le domaine (ou l'ensemble des positions) de T noté $Pos(T)$.
- $T(p)$ s'appelle l'étiquette à la position p.
- Si $p \in Pos(T)$ et $(\forall i \in \mathbb{N}_\star)pi \notin Pos(T)$, alors p est une feuille de T.

Soit TT tel que $Pos(TT) = \{\epsilon, 1, 2, 21, 22, 221, 222\}$ et :

$$\begin{aligned}
\epsilon &\mapsto + \\
1 &\mapsto x \\
2 &\mapsto + \\
21 &\mapsto y \\
22 &\mapsto + \\
221 &\mapsto z \\
222 &\mapsto z
\end{aligned}$$

$TT \quad =$



3 Sous-arbre

$T_{|p}$ est le sous-arbre à la position p défini par $T_{|p}(q) = T(pq)$
où $Pos(T_{|p}) = \{q \mid pq \in Pos(T)\}$.

EXERCICE : Décrivez $Pos(TT_{|22})$ et $TT_{|22}$.

FAIT : $(T_{|p})_{|q} = T_{|pq}$.

4 Remplacement

$T[U]_p$ est le remplacement du sous-arbre de T à la position p par l'arbre U, on le définit par

$$Pos(T[U]_p) = \{q \in Pos(T) \mid \neg(p\,\textbf{prefix}\,q)\} \cup \{pp' \mid p' \in Pos(U)\}$$

et

$$T[U]_p(q) = \begin{cases} T(q) \text{ si } \neg(p\,\textbf{prefix}\,q) \\ U(p') \text{ si } q = pp' \text{ avec } p' \in Pos(U) \end{cases}$$

EXERCICE : Soit $UU = TT[TT]_{21}$.
- Que vaut $UU(212)$?
- Dessinez UU.

RÉSULTATS :
- $T[U[V]_q]_p = T[U]_p[V]_{pq}$.
- $T[U]_p[V]_q = T[V]_q[U]_p$ si p et q sont étrangers[1]

4.1 Sous-arbre d'un remplacement

- Si p et q sont étrangers, alors $(T[U]_p)_{|q} = T_{|q}$.
- $(T[U]_p)_{|pp'} = U_{|p'}$.
- $(T[U]_p p')_{|p} = (T_{|p})[U]'_p$.

[1] p et q sont dits étrangers, si p n'est pas préfixe de q et si q n'est pas préfixe de p.

5 Signature

Une signature est une famille d'ensembles $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\Sigma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$$

Si $f \in \Sigma_n$, f est dit d'arité n.
Σ_0 est l'ensemble des constantes.

6 Termes

Soit X un ensemble dit ensemble des variables.

Quelques définitions :

* Un Σ-terme sur X est un arbre t étiqueté par $\Sigma \cup X$, tel que
  - Si $t(p) \in X$ alors p est une feuille.
  - Si $t(p) \in \Sigma_n$ alors
    - $i \leq n \quad \& \quad i \in \mathbb{N}_\star \Rightarrow pi \in Pos(t)$
    - et $p(n+1) \notin Pos(t)$.
* $T(\Sigma, X)$ est l'ensemble des Σ-termes sur X.
* $Var(t) = \{x \in X \mid (\exists p \in Pos(t)\ t(p) = x\}$

Fait : Si $t(p) \in \Sigma_0$ alors p est une feuille.

7 Σ-algèbres et morphismes

* Une Σ-algèbre est un couple $\mathcal{A} = (A, \Sigma^{\mathcal{A}})$ où
  A est un ensemble dit support de l'algèbre,

$$\Sigma^{\mathcal{A}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n^{\mathcal{A}}$$

  et $f^{\mathcal{A}} \in \Sigma_n^{\mathcal{A}} : A^n \to A$.
* Un morphisme $\varphi : T(\Sigma, X) \to A$ est une application telle que
  - $\varphi(x_i) = a_i$
  - $\varphi(f(t_1, ..., t_n)) = f^{\mathcal{A}}(\varphi(t_1), ..., \varphi(t_n))$.

8 Substitutions, domaine, codomaine

Soit V un ensemble dénombrable de variables.

* Une substitution est une application $\sigma : V \to T(\Sigma, V)$ qui est l'identité presque partout (c-à-d sauf sur un ensemble fini).
* On note : $Dom(\sigma) = \{x \in V \mid \sigma(x) \neq x\}$ le domaine.
* On note : $Range(\sigma) = \{\sigma(x) \mid x \in Dom(\sigma)\}$ le codomaine.

On étend σ à $T(\Sigma, V)$ en une application $\hat{\sigma}$ (souvent notée σ).

- $\hat{\sigma}(x) = \sigma(x)$,
- $\hat{\sigma}(f(t_1, ..., f(t_n)) = f(\hat{\sigma}(t_1), ..., \hat{\sigma}(t_n))$.

$Sub(T(\Sigma, V))$ est l'ensemble des substitutions.

9 Identités et réduction

* Une identité $s \approx t$ est un couple, c'est-à-dire de $T(\Sigma, V) \times T(\Sigma, V)$.
* Soit E un ensemble d'identités, la réduction $\xrightarrow[E]{}$ est définie par

$$s \xrightarrow[E]{} t$$

ssi

$$(\exists g \approx d \in E)(\exists \sigma \in Sub(T(\Sigma, V)))(\exists p \in Pos(s))$$

et

$$s_{|p} = \sigma(g) \quad \& \quad t = s[\sigma(d)]_p.$$

10 Systèmes de réécriture

D'autres définitions ! :

- Une règle de réécriture est une identité $g \approx d$ telle que $Var(g) \supseteq Var(d)$.
- Un système de réécriture est un ensemble de règles de réécriture.
- Un redex est une instance d'un membre gauche de règle de réécriture.
- Contracter le redex $s_{|p}$ à la position p,
  c'est passer de s à $t = s[\sigma(d)]_p$.