Réécriture

Unification

Le problème de l'unification

1 L'unification et les équations

- Le but de l'unification est de résoudre des équations.
- Un problème équationnel est un ensemble fini de paires [1] de termes:

$$E = \{s_1 \stackrel{?}{=} t_1, ..., s_n \stackrel{?}{=} t_n\}$$

2 Convention

Si t_i dans $s_i \stackrel{?}{=} t_i$ est une variable x_i, on écrira plutôt $x_i = s_i$.
La variable isolée, si elle existe est toujours à gauche.

3 Solution

Une solution de E ou un unificateur de E est une substitution σ telle que

$$\begin{gathered}\sigma(s_1) = \sigma(t_1) \\ \vdots \\ \sigma(s_n) = \sigma(t_n)\end{gathered}$$

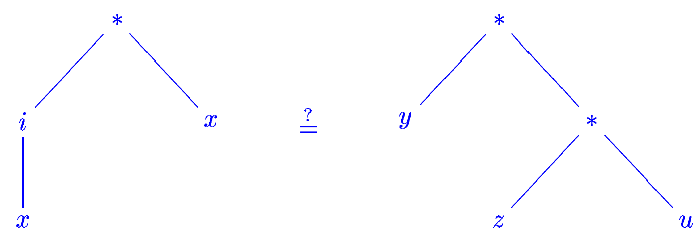
L'ensemble des unificateurs de E est noté $\mathcal{U}(E)$.
Si $\mathcal{U}(E) \neq \emptyset$ on dit que E est unifiable.

[1] Attention il s'agit bien de paires et pas de couples !

4 Exemples

4.1 Exemple1

Soit le problème :



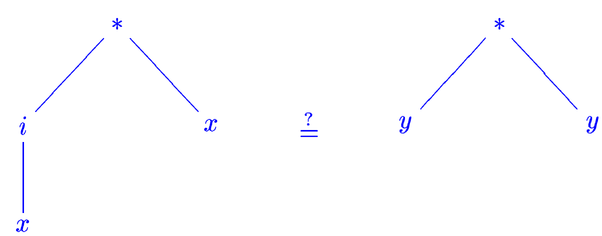
Les substitutions

$\{x \mapsto i(u) * u, \quad y \mapsto i(x), \quad z \mapsto i(u)\}$

$\{x \mapsto z * u, \quad y \mapsto i(x)\}$ sont chacune des solutions.

4.2 Exemple 2

Le problème :



n'a pas de solution, car il faudait que $\sigma(x) = i(\sigma(x))$.

Ce qui est impossible.

5 Ordre sur les substitutions

L'ensemble $Sub(T(\Sigma, V))$ est muni d'un ordre $\lesssim$ défini par

$$\sigma \lesssim \tau \text{ si et seulement si } (\exists \rho \in Sub(T(\Sigma, V)) \quad \tau = \rho \circ \sigma.$$

σ est dite plus générale que τ.

6 MGU

L'unificateur le plus général de E (ou mgu) est une substitution σ telle que

1. σ est un unificateur de E, c-à-d $\sigma \in \mathcal{U}(E)$.
2. Si $\theta \in \mathcal{U}(E)$ alors $\sigma \lesssim \theta$.

7 Forme résolue

Soit E un problème contenant $x \stackrel{?}{=} t$.

$x \stackrel{?}{=} t$ est en forme résolue si x n'apparaît nulle part ailleurs dans E.

En particulier,

- $x \notin Var(t)$
- et il n'y a pas d'autre équation de la forme $x \stackrel{?}{=} s$.

x est alors dite résolue.

Un système est résolu si toutes ses équations sont en forme résolue.

Si $E = \{x_1 \stackrel{?}{=} t_1, ..., x_n \stackrel{?}{=} t_n\}$ est résolu, alors $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, ..., x_n \mapsto t_n\}$ est un mgu de E.

On note σ_E

au lieu de $\{x_1 \mapsto t_1, ..., x_n \mapsto t_n\}$

Démonstration :

σ est un unificateur, c'est clair.

Si θ est un autre unificateur, alors $\theta(x_i) = \theta(t_i)$.

D'autre part, $t_i = \sigma(x_i)$, donc pour $x \in \{x_1, ..., x_n\} = Dom(\sigma)$, on a $\theta(x_i) = \theta(\sigma(x_i))$.

Donc $\theta = \theta\sigma$, c-à-d que σ est un mgu.

Unification par transformation

8 Transformations

Chaque transformation est écrite comme une règle d'inférence $R \quad \dfrac{E_{\text{avant}}}{E_{\text{après}}}$

Supprime $\quad \dfrac{\{u \stackrel{?}{=} u\} \cup E}{E}$

Decompose $\quad \dfrac{\{f(u_1, ..., u_n) \stackrel{?}{=} f(v_1, ..., v_n)\} \cup E}{\{u_1 \stackrel{?}{=} v_1, ..., u_n \stackrel{?}{=} v_n\} \cup E} \quad f \in \Sigma_n$

Elimine $\quad \dfrac{\{x \stackrel{?}{=} v\} \cup E}{\{x \stackrel{?}{=} v\} \cup \sigma(E)}$

où $x \stackrel{?}{=} v$ n'est pas en forme résolue et $x \notin Var(v)$

et $\sigma = \{x \mapsto v\}$.

9 Remarques

Si E est résolu, aucune règle ne s'applique (succès).

Ça n'est pas seul cas d'arrêt.. Les autres cas sont des échecs.

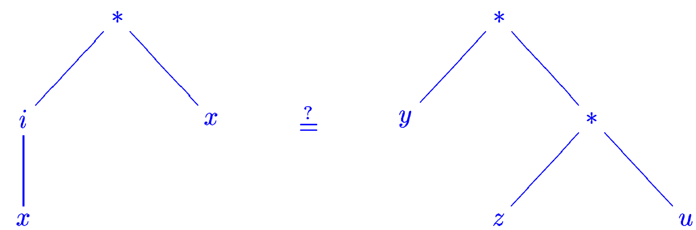
Si E' est obtenu à partir de E par application de l'une des règles, on écrit

$$E \mapsto E'$$

Cette méthode à des liens avec l'élimination de Gauss.
On simplifie par Supprime et Decompose et on élimine par Elimine.

10 Exercice

Appliquer les règles à:



Résultat : $\boxed{\text{Si } E \mapsto E' \text{ alors } U(E) = U(E').}$

Démonstration
La seule difficulté est Elimine.
Supposons $x \stackrel{?}{=} v \cup E \mapsto x \stackrel{?}{=} v \cup \sigma(E)$
où $x \stackrel{?}{=} v$ n'est pas en forme résolue et $x \notin Var(v)$
et $\sigma = \{x \mapsto v\}$.
Si $\theta \in U(x \stackrel{?}{=} v \cup E)$ alors

- $\theta(x) = \theta(v)$
- et pour $s \stackrel{?}{=} t \in E$, on a $\theta(s) = \theta(t)$. Clairement aussi $\theta(\sigma(s)) = \theta(\sigma(t))$.

Donc $\theta \in U(x \stackrel{?}{=} v \cup \sigma(E))$.

(Correction) : Si $E \overset{*}{\mapsto} E'$ et E' est résolu alors $mgu(E) = \sigma_{E'}$.

On combine les deux lemmes précédents.
$U(E) = U(E')$ donc $mgu(E) = mgu(E')$.
Or $mgu(E') = \sigma_{E'}$. c.q.f.d.

(Complétude) : Si E est unifiable alors il existe E' tel que

- $E \overset{*}{\mapsto} E'$,
- E' est résolu.

Démonstration Soit (E_i) une suite telle que $E_0 = E$ et $E_i \mapsto E_{i+1}$.
On veut montrer qu'il existe n tel que E_n est résolu.
Si E_i n'est pas résolu, alors

- si E_i ne contient pas d'équation $x \stackrel{?}{=} v$ non résolue, il contient une équation $s = t$ décomposable, alors Decompose s'applique.

- si E_i contient une équation triviale $x \stackrel{?}{=} x$ alors Supprime s'applique.

- si E_i contient une équation non résolue $x \stackrel{?}{=} t$ avec $x \notin Var(t)$, alors Elimine s'applique.

(Complétude) : Si E est unifiable alors il existe E' tel que

- $E \stackrel{*}{\Rightarrow} E'$,
- E' est résolu.

Le processus s'arrête.

Démonstration En effet, si l'on attache à chaque E_i le triplet (n_v, n_f, n_e) où

- n_v est le nombre de variables non resolues,
- n_f est le nombre de symboles fonctionnels,
- et n_e est le nombre d'équations.

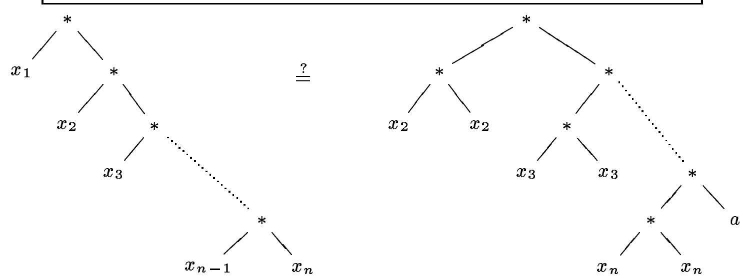
Alors Chaque règle diminue cette quantité suivant l'ordre lexicographique.
En effet,

- La règle Supprime
  - diminue le nombre de variables non résolues n_v (cas où la supression de $x \stackrel{?}{=} x$ rend la variable x résolue),
  - ou si elle ne diminue pas le nombre de variables non résolues, elle diminue le nombre n_f de symboles fonctionnels (cas où u contient au moins un symbole fonctionnel),
  - sinon elle diminue le nombre d'équations n_e.

- La règle Decompose
  - diminue le nombre de variables non résolues n_v (cas où l'un des $u_i \stackrel{?}{=} v_i$ est de la forme $x \stackrel{?}{=} t$ et où x est résolue),
  - ou si elle ne diminue pas le nombre de variables non résolues, elle diminue le nombre n_f de symboles fonctionnels.

- La règle Elimine
  - diminue le nombre n_v de variables non résolues.

L'unification peut être exponentielle en la taille du problème originel.



La présentation (forme triangulaire)

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 * x_2 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x_n * x_n \\ x_n &= a * a \end{aligned}$$

est plus simple que la présentation

$$\begin{aligned} x_1 &= (\ldots((a * a) * (a * a))\ldots * ((a * a) * (a * a))\ldots) \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= (a * a) * (a * a) \\ x_n &= a * a \end{aligned}$$

Il faut utiliser la règle Elimine de façon paresseuse.