

Magistère d'Informatique et Modélisation

Examen final du module de réécriture

14 mai 2001

Documents autorisés.

Exercice 1 (une variante du lemme de Newman)

Soit un ensemble A , un ordre $>$ qui termine sur A et une relation \xrightarrow{R} sur A contenue dans $>$. On dit que \xrightarrow{R} est W-confluente si pour tout $a, b, c \in A$ avec $b \xleftarrow{R} a \xrightarrow{R} c$, il existe une preuve d_0, \dots, d_n de $b \xleftarrow{R^*} c$ telle que $(\forall i) (0 \leq i \leq n) \Rightarrow a > d_i$. Autrement dit la suite d_0, \dots, d_n satisfait

- $b = d_0$,
- $c = d_n$,
- $d_i \xleftarrow{R} d_{i+1}$ ou $d_i \xrightarrow{R} d_{i+1}$,
- $a > d_i$.

1. Montrer que si \xrightarrow{R} est localement confluente, elle est W-confluente.
2. Montrer que si \xrightarrow{R} est W-confluente, alors pour toute preuve \mathcal{P} de $b \xleftarrow{R^*} c$ qui n'est pas une preuve par réécriture, il existe une preuve \mathcal{P}' de $b \xleftarrow{R^*} c$ telle que $\mathcal{P} \succ_{>} \mathcal{P}'$. (On définira $\succ_{>}$ à partir de $>$ comme un ordre qui termine.).
3. Rappeler la propriété de Church-Rosser pour \xrightarrow{R} .
4. Dédire de la question 2, que si \xrightarrow{R} est W-confluente, alors elle satisfait la propriété de Church-Rosser.

Exercice 2 (au delà des ordres polynômiaux)

On veut prouver par des interprétations la terminaison du système

$$R_1 \left\{ \begin{array}{l} 0 + x \longrightarrow x \\ S(x) + y \longrightarrow S(x + y) \\ 0 * x \longrightarrow 0 \\ S(x) * y \longrightarrow y + (x * y) \end{array} \right. \quad R_2 \left\{ \begin{array}{l} fact(0) \longrightarrow S(0) \\ fact(S(x)) \longrightarrow S(x) * fact(x) \end{array} \right.$$

1. Montrer la terminaison de R_1 par une interprétation polynômiale.
2. On considère pour S , $*$ et $fact$ les interprétations dans \mathbb{N}

$$\begin{aligned} \llbracket S \rrbracket(X) &= X + 3 \\ \llbracket * \rrbracket(X_1, X_2) &= X_1 \cdot X_2 \\ \llbracket fact \rrbracket(X) &= X^X \end{aligned}$$

Donner la valeur de $fact(S(x))$ et de $S(x) * fact(x)$ pour ces interprétations sachant que la valeur de x est a .

3. Comparer les deux nombres obtenus à la question précédente.
4. Montrer la terminaison de $R_1 \cup R_2$ en utilisant des interprétations où les exponentiations ont autorisées.

Exercice 3 (complétion)

1. Donner un ordre lpo tel que $s(x + y) >_{lpo} s(x) + y$.
2. Avec l'ordre lpo de la première question, appliquer la procédure de complétion à l'ensemble d'identités :

$$s(x + y) = s(x) + y \tag{1}$$

$$s(x + y) = x + s(y) \tag{2}$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \tag{3}$$

On donnera les règles e transformation utilisées et l'état du système à chaque étape.