Magistère d'Informatique et Modélisation

Examen final du module de réécriture

14 mai 2001

Documents autorisés.

Exercice 1 (une variante du lemme de Newman)

Soit un ensemble A, un ordre $>$ qui termine sur A et une relation $\xrightarrow[R]{}$ sur A contenue dans $>$. On dit que $\xrightarrow[R]{}$ est W-confluente si pour tout $a, b, c \in A$ avec $b \xleftarrow[R]{} a \xrightarrow[R]{} c$, il existe une preuve $d_0, ..., d_n$ de $b \xleftrightarrow[R]{*} c$ telle que $(\forall i)\ (0 \leq i \leq n) \Rightarrow\ a > d_i$. Autrement dit la suite $d_0, ..., d_n$ satisfait

- $b = d_0$,
- $c = d_n$,
- $d_i \xleftarrow[R]{} d_{i+1}$ ou $d_i \xrightarrow[R]{} d_{i+1}$,
- $a > d_i$.

1. Montrer que si $\xrightarrow[R]{}$ est localement confluente, elle est W-confluente.
2. Montrer que si $\xrightarrow[R]{}$ est W-confluente, alors pour toute preuve $\mathcal{P}$ de $b \xleftrightarrow[R]{*} c$ qui n'est pas une preuve par réécriture, il existe une preuve $\mathcal{P}'$ de $b \xleftrightarrow[R]{*} c$ telle que $\mathcal{P} \succ_> \mathcal{P}'$. (On définira $\succ_>$ à partir de $>$ comme un ordre qui termine.).
3. Rappeler la propriété de Church-Rosser pour $\xrightarrow[R]{}$.
4. Déduire de la question 2, que si $\xrightarrow[R]{}$ est W-confluente, alors elle satisfait la propriété de Church-Rosser.

Exercice 2 (au delà des ordres polynômiaux)

On veut prouver par des interprétations la terminaison du système

$$R_1 \begin{cases} 0 + x & \longrightarrow & x \\ S(x) + y & \longrightarrow & S(x + y) \\ 0 * x & \longrightarrow & 0 \\ S(x) * y & \longrightarrow & y + (x * y) \end{cases} \qquad R_2 \begin{cases} fact(0) & \longrightarrow & S(0) \\ fact(S(x)) & \longrightarrow & S(x) * fact(x) \end{cases}$$

1. Montrer la terminaison de R_1 par une interprétation polynômiale.
2. On considère pour S, $*$ et $fact$ les interprétations dans $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} [\![S]\!](X) &= X + 3 \\ [\![*]\!](X_1, X_2) &= X_1 \cdot X_2 \\ [\![fact]\!](X) &= X^X \end{aligned}$$

   Donner la valeur de $fact(S(x))$ et de $S(x) * fact(x)$ pour ces interprétations sachant que la valeur de x est a.
3. Comparer les deux nombres obtenus à la question précédente.
4. Montrer la terminaison de $R_1 \cup R_2$ en utilisant des interprétations où les exponentiations ont autorisées.

Exercice 3 (complétion)

1. Donner un ordre *lpo* tel que $s(x + y) >_{lpo} s(x) + y$.
2. Avec l'ordre *lpo* de la première question, appliquer la procédure de complétion à l'ensemble d'identités :

$$\begin{aligned} s(x + y) &= s(x) + y && (1) \\ s(x + y) &= x + s(y) && (2) \\ (x + y) + z &= x + (y + z) && (3) \end{aligned}$$

On donnera les règles e transformation utilisées et l'état du système à chaque étape.