Magistère d'Informatique et Modélisation

Corrigé de l'examen final du module de réécriture

14 mai 2001

Exercice 1 (une variante du lemme de Newman)

1. Si $\xrightarrow[R]{}$ est localement confluent alors pour $a, b, c \in A$ avec $b \xleftarrow[R]{} a \xrightarrow[R]{} c$, il existe une preuve $d_0, \cdots, d_n$ de $b \xleftrightarrow[R]{*} c$ et un p tels que $0 \leq p \leq n$ et
$$d_0 \xrightarrow[R]{} \cdots \xrightarrow[R]{} d_p \xleftarrow[R]{} \cdots \xleftarrow[R]{} d_n.$$
Comme $>$ contient $\xrightarrow[R]{}$, on a $a > d_0 > \cdots > d_p$ et $a > d_n > \cdots > d_p$. Donc a domine toutes les étapes de la preuve de $d_0 \xleftrightarrow[R]{*} d_n$. Par conséquent, $\xrightarrow[R]{}$ est W-confluente.
2. On considère l'ordre $\succ_>$ sur $\mathcal{P}$ qui est l'extension multiensemble de l'ordre $>$. Soit une preuve $b = d_0 \xleftrightarrow[R]{} d_1 \cdots \xleftrightarrow[R]{} d_n = c$ de $b \xleftrightarrow[R]{*} c$. Si cette preuve n'est pas une preuve par réécriture, elle a un pic. Soit
$$d_{i-1} \xleftarrow[R]{} d_i \xrightarrow[R]{} d_{i+1}$$
l'un de ces pics. Par W-confluence, il existe une preuve
$$d_{i-1} = e_0 \xleftrightarrow[R]{} \cdots .e_k \xleftrightarrow[R]{} d_{i+1}$$
de $d_{i-1} \xleftrightarrow[R]{*} d_{i+1}$ telle que $d_i > e_j$ (pour $0 \leq j \leq k$). Clairement la preuve
$$d_0 \xleftrightarrow[R]{} d_1 \cdots d_{i-1} \xleftrightarrow[R]{} e_1 \cdots \xleftrightarrow[R]{} e_{k-1} \xleftrightarrow[R]{} d_{i+1} \cdots \xleftrightarrow[R]{} d_n$$
est plus petite pour $\succ_>$ que la preuve
$$d_0 \xleftrightarrow[R]{} d_1 \cdots d_{i-1} \xleftarrow[R]{} d_i \xrightarrow[R]{} d_{i+1} \cdots \xleftrightarrow[R]{} d_n.$$
3. Voir cours.
4. Comme $\succ_>$ termine, le processus de réduction des preuves ne peut pas être infini. Partant d'une preuve quelconque de $a \xleftrightarrow[R]{*} b$, par réduction on obtient une preuve qui est une preuve par réécriture.

Exercice 2 (au delà des ordres polynômiaux)

1. Considérons l'interprétation :

$$\begin{array}{rcl} [\![0]\!]() & = & 2 \\ [\![S]\!](X) & = & X+3 \\ [\![+]\!](X_1,X_2) & = & 2X_1+X_2 \\ [\![*]\!](X_1,X_2) & = & X_1\cdot X_2. \end{array}$$

   et prenons a pour valeur de x et b pour valeur de y. On suppose que $a, b \geq 2$. On a

$$\begin{array}{rcl} [\![0+x]\!] & = & 4+a \\ [\![x]\!] & = & a \\ [\![S(x)+y]\!] & = & 6+2a+b \\ [\![S(x+y)]\!] & = & 2a+b \\ [\![0*x]\!] & = & 2a \\ [\![0]\!] & = & 2 \\ [\![S(x)*y]\!] & = & 3b+ab \\ [\![y+(x*y)]\!] & = & 2b+ab \end{array}$$

   Le inégalités sont faciles à vérifier.

2. On obtient les valeurs.

$$\begin{array}{rcl} [\![fact(S(x))]\!] & = & (a+3)^{a+3} \\ [\![S(x)\ *fact(x)]\!] & = & (a+3)\cdot a^a \end{array}$$

3. $(a+3)^{a+3} = (a+3)^3 \cdot (a+3)^a$. On a

$$\begin{array}{rcl} (a+3)^3 & > & a+3 \\ (a+3)^a & > & a^a. \end{array}$$

   Comme les quantités sont positives les inégalités se conservent et

$$(a+3)^3\cdot(a+3)^a \quad > \quad (a+3)\cdot a^a$$

4. Il suffit de combiner les interprétations des questions 1. et 2 et les inégalités vérifiées aux questions 1. et 3.

Exercice 3 (complétion)

1. Il suffit de prendre un ordre *lpo* avec comme précédence $s > +$.

2. Nous allons prendre comme ordre un *lpo* avec comme précédence $s > +$ et comme statut pour $+$ “gauche à droite”. La complétion étant indéterministe, il y a plusieurs exécutions possibles. En voici une. Le résultat obtenu est essentiellement unique.

Nous regroupons (en mettant un exposant) les règles **Simplify** quand elles s’appliquent à la suite les unes des autres. Par conséquent, les numéros des ensembles de règles et d’identités ne correspondent pas exactement aux numéros d’étape, mais le lecteur pourra rectifier la numérotation s’il le désire.

$R_0 = \emptyset$

$$E_0 = \left\{ \begin{array}{lcl} s(x+y) & = & s(x)+y \\ s(x+y) & = & x+s(y) \\ (x+y)+z & = & x+(y+z) \end{array} \right\}$$

Les règles de transformations sont

Orient

$$R_1 = \{s(x+y) \longrightarrow s(x)+y\}$$

$$E_1 = \left\{ \begin{array}{lcl} s(x+y) & = & x+s(y) \\ (x+y)+z & = & x+(y+z) \end{array} \right\}$$

Simplify

$$R_2 = \{s(x+y) \longrightarrow s(x)+y\}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{array}{lcl} s(x)+y & = & x+s(y) \\ (x+y)+z & = & x+(y+z) \end{array} \right\}$$

Orient

$$R_3 = \left\{ \begin{array}{lcl} s(x+y) & \longrightarrow & s(x)+y \\ s(x)+y & \longrightarrow & x+s(y) \end{array} \right\}$$

$$E_3 = \{(x+y)+z = x+(y+z)\}$$

Compose

$$R_4 = \left\{ \begin{array}{lcl} s(x+y) & \longrightarrow & x+s(y) \\ s(x)+y & \longrightarrow & x+s(y) \end{array} \right\}$$

$$E_4 = \{(x+y)+z = x+(y+z)\}$$

Orient

$$R_5 = \left\{ \begin{array}{lcl} s(x+y) & \longrightarrow & x+s(y) \\ s(x)+y & \longrightarrow & x+s(y) \\ (x+y)+z & \longrightarrow & x+(y+z) \end{array} \right\}$$

$$E_5 = \emptyset$$

Deduce On superpose la première règle de R_4 dans la deuxième règle de R_4. La superposition est $s(x+y)+z$.

$$R_6 = \left\{ \begin{array}{lcl} s(x+y) & \longrightarrow & x+s(y) \\ s(x)+y & \longrightarrow & x+s(y) \\ (x+y)+z & \longrightarrow & x+(y+z) \end{array} \right\}$$

$$E_6 = \{(s(x)+y)+z = (x+y)+s(z)\}$$

Simplify[4] On simplifie trois fois le membre gauche de E_6 et une fois le membre droit.

$$R_7 = \left\{ \begin{array}{lcl} s(x+y) & \longrightarrow & x+s(y) \\ s(x)+y & \longrightarrow & x+s(y) \\ (x+y)+z & \longrightarrow & x+(y+z) \end{array} \right\}$$

$$E_7 = \{x+(y+s(z)) = x+(y+s(z))\}$$

Delete

$$R_8 = \left\{ \begin{array}{lcl} s(x+y) & \longrightarrow & x+s(y) \\ s(x)+y & \longrightarrow & x+s(y) \\ (x+y)+z & \longrightarrow & x+(y+z) \end{array} \right\}$$

$$E_8 = \emptyset$$

Deduce Il y a une nouvelle superposition $s(s(x)+y)$ de la deuxième règle de R_8 dans la première règle de R_8.

$$R_9 = \left\{ \begin{array}{lcl} s(x+y) & \longrightarrow & x+s(y) \\ s(x)+y & \longrightarrow & x+s(y) \\ (x+y)+z & \longrightarrow & x+(y+z) \end{array} \right\}$$

$$E_9 = \{s(x)+s(y) = s(x+s(y))\}$$

Simplify[2] On simplifie une fois à gauche et une fois à droite.

$$R_{10} = \left\{ \begin{array}{lcl} s(x+y) & \longrightarrow & x+s(y) \\ s(x)+y & \longrightarrow & x+s(y) \\ (x+y)+z & \longrightarrow & x+(y+z) \end{array} \right\}$$

$$E_{10} = \{x+s(s(y)) = x+s(s(y)))\}$$

Delete

$$R_{11} = \left\{ \begin{array}{lcl} s(x+y) & \longrightarrow & x+s(y) \\ s(x)+y & \longrightarrow & x+s(y) \\ (x+y)+z & \longrightarrow & x+(y+z) \end{array} \right\}$$

$$E_{11} = \emptyset$$

Deduce Il y a une superposition $((x_1+x_2)+y)+z$ de la troisième règle de R_{11} dans elle-même.

$$R_{12} = \left\{ \begin{array}{lcl} s(x+y) & \longrightarrow & x+s(y) \\ s(x)+y & \longrightarrow & x+s(y) \\ (x+y)+z & \longrightarrow & x+(y+z) \end{array} \right\}$$

$$E_{12} = \{(x_1+(x_2+y))+z = (x_1+x_2)+(y+z)\}$$

Simplify[3]

$$R_{13} = \left\{ \begin{array}{lcl} s(x+y) & \longrightarrow & x+s(y) \\ s(x)+y & \longrightarrow & x+s(y) \\ (x+y)+z & \longrightarrow & x+(y+z) \end{array} \right\}$$

$$E_{13} = \{x_1 + (x_2 + (y+z)) = x_1 + (x_2 + (y+z))\}$$

Delete

$$R_{14} = \left\{ \begin{array}{lcl} s(x+y) & \longrightarrow & x+s(y) \\ s(x)+y & \longrightarrow & x+s(y) \\ (x+y)+z & \longrightarrow & x+(y+z) \end{array} \right\}$$

$$E_{14} = \emptyset$$

Quelques commentaires

Sur le corrigé

Nul n'est parfait ! Il y a donc des erreurs dans le corrigé remis à la fin de l'examen. N'apprend-on pas aussi par l'échec ?

Dans l'exercice 2, l'assertion qui répond à la question 4 est un peu rapide. Des étudiants ont pris 3 comme interprétation de 0. Il est plus astucieux de prendre $2X^X$ comme interprétation de $fact$, car on récupère facilement les calculs des questions précédentes.

Dans l'exercice 3, la précédence $s > +$ et le statut "gauche à droite"pour $+$ ne permettent d'orienter l'équation $s(x) + y = x + s(y)$. Bravo à ceux qui l'on vue.

- Certains ont alors conclu à un échec.
- Certains ont choisi une orientation qui étend l'ordre sans la justifier.
- Les plus malins sont ceux qui ont répondu qu'il fallait prendre la précédence $s \sim +$.
- Enfin notons que les interprétations

$$\begin{array}{rcl} [\![+]\!](X,Y) & = & XY + X + 1 \\ [\![s]\!](X) & = & 2X \end{array}$$

donnent (si je ne me trompe) avec $a, b, c \geq 2$

$$\begin{array}{rcl} [\![s(x+y)]\!] & = & 2ab + 2a + 2 \\ [\![s(x)+y]\!] & = & 2ab + 2a + 1 \\ [\![x+s(y)]\!] & = & 2ab + a + 1 \\ [\![(x+y)+z]\!] & = & abc + ab + ac + a + c + 1 \\ [\![(x+y)+z]\!] & = & abc + ab + 2a + 1 \end{array}$$

L'équation $E_6 = \{(s(x) + y) + z = (x + y) + s(z)\}$ aurait dû être

$$E_6 = \{(x + s(y)) + z = (x + y) + s(z)\}.$$

Sur la correction

En corrigeant, j'ai constaté quelques fautes dans les copies que je souhaite signaler.

Dans l'exercice 1. Voici quelques assertion erronées rencontrées.

1. En remplaçant un pic par une conversion on diminue le nombre de pics.
2. En remplaçant un pic par une conversion on voit que la complexité de la preuve décroît et donc on ne peut pas réduire indéfiniment.
3. On utilise comme ordre sur les preuves un ordre lexicographique.

Dans l'exercice 2, il ne faut pas se contenter de vérifier des inégalités larges entre les interprétations, mais des inégalités strictes.