Magistère d'Informatique et Modélisation

Partiel de réécriture

26 Mars 2001

Documents autorisés.

Exercice 1

Soient les systèmes de réécriture :

$$R_1 \left\{ \begin{array}{lcl} s(m) \oplus n & \longrightarrow & s(m \oplus n) \\ 0 \oplus n & \longrightarrow & n \\ d(s(n)) & \longrightarrow & s(s(d(n))) \\ d(0) & \longrightarrow & 0 \end{array} \right. \qquad R_2 \left\{ \begin{array}{lcl} c(s(n)) & \longrightarrow & s(d(n) \oplus c(n)) \\ c(0) & \longrightarrow & 0 \end{array} \right.$$

1. Montrez que les termes $s^k(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$ sont des formes normales pour $R_1 \cup R_2$. En admettant la terminaison de $R_1 \cup R_2$, montrez que chaque terme clos $t \in T(\Sigma)$ possède pour $R_1 \cup R_2$ une forme normale qui est $s^k(0)$ pour un $k \in \mathbb{N}$.
2. Admettant que la forme normale est unique, calculez k en fonction de p pour la forme normale de $c(s^p(0))$.
3. Montrez la terminaison du système R_1 par l'ordre polynômial défini sur $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$ par les interprétations

$$\begin{array}{rcl} [\![0]\!] & = & 2 \\ [\![s]\!](p) & = & p+1 \\ [\![\oplus]\!](p,q) & = & 2p+q \\ [\![d]\!](p) & = & 3p \end{array}$$

4. Montrez la terminaison du système $R_1 \cup R_2$, par un ordre polynômial.
5. Soit

$$R_3 \left\{ \begin{array}{lcl} t(s(n)) & \longrightarrow & c(t(n)) \\ t(0) & \longrightarrow & s(s(0)) \end{array} \right.$$

   Peut-on montrer la terminaison de $R_1 \cup R_2 \cup R_3$ par un ordre polynômial ?
6. Montrez que la forme normale dans $R_1 \cup R_2$ de tout terme est unique.

Exercice 2

Dans cet exercice, qui est une variation sur l'*algorithme d'unification de Martelli-Montanari*, on suppose que la signature n'est constituée que d'une constante c et d'un symbole dyadique f, c-à-d d'arité 2.

Dans la suite, un multiensemble comme $a \mapsto 1, b \mapsto 2$ et $c \mapsto 0$ pour tout autre elément c est noté $\{\!\{a, b, b\}\!\}$. L'ensemble vide est noté $\emptyset$ et le multiensemble vide est noté $\{\!\{\ \}\!\}$. Une *multi-équation* est un couple (X, M) où X est un ensemble de variables et M est un multiensemble de termes qui ne sont pas des variables. Un *problème multi-équationnel* est un ensemble de multi-équations. Si (s, t) est une paire de termes qui ne sont pas des variables et que l'on veut unifier, on lui associe le problème multi-équationnel $\{(\Xi, \Pi)\}$ où $\Xi = \{\xi\}$, où $\Pi = \{\!\{s, t\}\!\}$ et où ξ est une variable qui n'apparaît ni dans s ni dans t (introduite d'ailleurs uniquement par commodité). Par exemple, si on doit unifier $x + y = x + (z + z)$, on considérera le problème multi-équationnel $\{(\{\xi\}, \{\!\{x + y, x + (z + z)\}\!\})\}$.

On définit trois règles :

$$Net \quad \frac{(\{x\}, \{\!\{\ \}\!\}) \cup E}{E}$$

$$Fus \quad \frac{(X, M) \cup (X', M') \cup E}{(X \cup X', M \cup M') \cup E} \quad \text{si } X \cap X' \neq \emptyset$$

$$Dec \quad \frac{(X, M \cup \{\!\{s, t\}\!\}) \cup E}{(X, M \cup \{\!\{Com(s, t)\}\!\}) \cup Muleq(s, t) \cup E} \quad \text{si } Muleq(s, t) \text{ est défini.}$$

Si s et t sont deux termes, $Muleq(s, t)$ est l'ensemble des multi-équations issues de s et t et $Com(s, t)$ est la partie commune de s et t. Ils sont définis comme suit. Dans les définitions, tt est un terme qui n'est pas une variable et x et y sont des variables.

$$\begin{array}{rcl}
Muleq(f(s_1, s_2), f(t_1, t_2)) & = & Muleq(s_1, t_1) \cup Muleq(s_2, t_2) \\
Muleq(c, c) & = & \emptyset \\
Muleq(x, tt) & = & (\{x\}, \{\!\{tt\}\!\}) \\
Muleq(tt, x) & = & (\{x\}, \{\!\{tt\}\!\}) \\
Muleq(x, y) & = & (\{x\} \cup \{y\}, \{\!\{\ \}\!\})
\end{array}$$

Si $Muleq(s, t)$ n'apparaît dans aucun des cas ci-dessus, $Muleq(s, t)$ n'est pas défini.

$$\begin{array}{rcl}
Com(f(s_1, s_2), f(t_1, t_2)) & = & f(Com(s_1, t_1), Com(s_2, t_2)) \\
Com(c, c) & = & c \\
Com(x, tt) & = & x \\
Com(tt, x) & = & x \\
Com(x, y) & = & x
\end{array}$$

Si $Com(s,t)$ n'apparaît dans aucun des cas ci-dessus, $Com(s,t)$ n'est pas défini.

1. On définit deux termes $a = f(x, f(x,c))$ et $b = f(f(c,c), f(x,y))$. Calculez $Muleq(a,b)$ et $Com(a,b)$.
2. «Unifiez» par cette méthode $f(f(x, f(x,c)), f(f(c,c), f(x,y))) = f(z,z)$. En d'autres termes, mettez l'équation sous la forme (Ξ, Π) ci-dessus et appliquez les règles de transformation, jusqu'à ce que plus aucune ne s'applique.
3. Donnez et discutez les cas d'arrêt par échec de l'algorithme.
4. Étant donné un problème multi-équationnel E, on définit sur les variables une relation $x \lessdot_E y$ s'il existe une multi-équation $(X, M) \in E$ et un terme $t \in M$ tels que $x \in X$ et $y \in Var(t)$. Définissez les formes résolues. Quelle est la substitution que vous associeriez à chacune de ces formes résolues.
5. Décrivez $\lessdot_E$ pour le problème multi-équationnel E résultat de la question 2.
6. Montrez que s'il n'y a pas de règle applicable, s'il n'y pas d'échec et si la relation $\lessdot_E$ n'a pas de cycle, alors le système E est en forme résolue.
7. Donnez un ordre qui termine et tel que les règles diminuent cet ordre.
8. Définissez l'ensemble des solutions d'un problème multi-équationnel. Montrez que les règles préservent cet ensemble de solutions.