Magistère d'Informatique et Modélisation

Corrigé du partiel de réécriture

26 Mars 2001

Exercice 1

1. Aucun membre gauche de règle de $R_1 \cup R_2$ ne filtre $s^k(0)$.

   Pour montrer que chaque terme admet une forme normale qui est l'un des $s^k(0)$, il faut montrer que tout terme qui n'est pas de cette forme est réductible et comme il n'y a qu'un nombre fini de réductions possibles partant d'un terme donné, cette forme $s^k(0)$ est forcément atteinte.

   Soit un terme t qui n'est pas de la forme $s^k(0)$; t contient un symbole qui est soit $\oplus$, soit d, soit c. Considérons, le symbole $\oplus$, d, c qui est le plus bas dans t ;c-à-d que ce symbole est à une position p telle que pour tout r, $t(pr)$ est soit s , soit 0. Par conséquent $t_{|p}$ filtre l'un des membres gauches d'une règle de $R_1 \cup R_2$.

2. On admet que $\mathsf{nf}(s^p(0) \oplus s^q(0)) = s^{p+q}(0)$. On voit que $\mathsf{nf}(d(s^n(0))) = s^{2n}(0)$. En effet, par induction $\mathsf{nf}(d(0)) = 0 = s^0(0)$ et

   $$\mathsf{nf}(d(s^{n+1}(0))) = \mathsf{nf}(d(s(s^n(0)))) = s(s(\mathsf{nf}(d(s^n(0))))) = s(s(s^{2n}(0))) = s^{2(n+1)}(0).$$

   Montrons que $\mathsf{nf}(c(s^n(0))) = s^{n^2}(0)$. Clairement $\mathsf{nf}(c(0)) = 0$ et

   $$\begin{aligned} \mathsf{nf}(c(s^{n+1}(0))) &= \mathsf{nf}(c(s(s^n(0)))) \\ &= s(\mathsf{nf}(d(s^n(0))) \oplus \mathsf{nf}(c(s^n(0)))) \\ &= s(s^{2n}(0) \oplus s^{n^2}(0)) \\ &= s^{1+2n+n^2}(0) = s^{(n+1)^2}(0). \end{aligned}$$

3. Il suffit de démontrer un certain nombre d'inégalités.

   $$\begin{aligned} \pi(s(m) \oplus n) &= 2\pi(m) + 2 + \pi(n) \\ &> 2\pi(m) + \pi(n) + 1 \\ &= \pi(s(m \oplus n)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\pi(0 \oplus n) &= 4 + \pi(n) \\
&> \pi(n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi(d(s(n))) &= 3\pi(n) + 3 \\
&> 3\pi(n) + 2 \\
&= \pi(s(s(d(n))))
\end{aligned}
$$

Si l'on sait prouver que $6 > 2$ on doit pouvoir prouver que $\pi(d(0)) > \pi(0)$.

4. On prend comme interprétation $[\![c]\!](p) = p^3$ et on voit que

$$
\begin{aligned}
\pi(d(s(n))) &= (\pi(n) + 1)^3 \\
&= \pi(n)^3 + 3\pi(n)^2 + 3\pi(n) + 1 \\
&> 1 + 2(3\pi(n)) + \pi(n)^3 \\
&= \pi(s(d(n) + c(n))).
\end{aligned}
$$

   On remarque, en effet, que $\pi(n)^2 > \pi(n)$, puisque $\pi(n) > 2$.
   $\pi(c(0)) > \pi(0)$ vient de $2^3 = 8 > 2$.

5. La forme normale de $t(s^n(0))$ est $s^{2^{2^n}}(0)$. Tout d'abord remarquons que $(2^{2^n})^2 = 2^{2^{n+1}}$.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{nf}(t(s^{n+1}(0))) &= \mathsf{nf}(c(t(s^n(0)))) \\
&= \mathsf{nf}(s^{(2^{2^n})^2}(0)) \\
&= s^{2^{2^{n+1}}}.
\end{aligned}
$$

   La forme normale de $t^p(0)$ est donc une tour de la forme $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ et la longueur de la plus longue chaîne de dérivation est plus que doublement exponentielle. Donc on ne peut pas faire la preuve de terminaison en utilisant les ordres polynômiaux.

6. Il n'y a pas de paires critiques, donc le système est localement confluent. Et comme il termine, il est confluent. Donc il y a unicité de la forme normale.

Exercice 2

1.

$$\begin{aligned}
Muleq(a,b) &= Muleq(x, f(c,c)) \cup Muleq(f(x,c), f(x,y)) \\
&= (\{x\}, \{\!\{f(c,c)\}\!\}) \cup Muleq(x,x) \cup Muleq(c,y) \\
&= \{(\{x\}, \{\!\{f(c,c)\}\!\}), (\{x\}, \{\!\{\ \}\!\}), (\{y\}, \{\!\{c\}\!\})\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Com(a,b) &= f(Com(x, f(c,c)), Com(f(x,c), f(x,y))) \\
&= f(x, f(Com(x,x), Com(c,y))) \\
&= f(x, f(x,y))
\end{aligned}$$

2. L'équation se met sous la forme

$$(\Sigma, \Pi) = \{(\{\xi\}, \{\!\{f(f(x, f(x,c)), f(f(c,c), f(x,y))), f(z,z)\}\!\})\}.$$

On a donc

$$\begin{gathered}
(\Sigma, \Pi) \\
\Mapsto \\
(\{\xi\}, \{\!\{f(z,z)\}\!\}) \\
(\{z\}, \{\!\{f(x, f(x,c))\}\!\}) \\
(\{z\}, \{\!\{f(f(c,c), f(x,y))\}\!\}) \\
\Mapsto \\
(\{\xi\}, \{\!\{f(z,z)\}\!\}) \\
(\{z\}, \{\!\{f(x, f(x,c)), f(f(c,c), f(x,y))\}\!\}) \\
\Mapsto \\
(\{\xi\}, \{\!\{f(z,z)\}\!\}) \\
(\{z\}, \{\!\{f(x, f(x,y))\}\!\}) \\
(\{x\}, \{\!\{f(c,c)\}\!\}) \\
(\{x\}, \{\!\{\ \}\!\}) \\
(\{y\}, \{\!\{c\}\!\}) \\
\Mapsto \\
(\{\xi\}, \{\!\{f(z,z)\}\!\}) \\
(\{z\}, \{\!\{f(x, f(x,y))\}\!\}) \\
(\{x\}, \{\!\{f(c,c)\}\!\}) \\
(\{y\}, \{\!\{c\}\!\})
\end{gathered}$$

La première étape est Dec, la deuxième Fus, la troisième Dec, la quatrième Net.

3. Une première forme d'échec pour l'algorithme est un échec d'un Dec à travers un échec de $Muleq$ quand un appel récursif à $Muleq$ se fait sur deux termes qui ont des racines différentes (dans notre cas $+$ et c).

   Une deuxième forme d'échec pour l'algorithme est la détection d'un cycle parmi les variables (relation $\lessdot_E$).

4. Une forme résolue est une multi-équation dans laquelle,

   - chaque variable apparaît une seule fois en partie droite,
   - chaque membre gauche est réduit à un terme ou à aucun terme dans le cas où le membre gauche contient plus d'une variable,
   - la relation $\lessdot_E$ est sans cycle.

   Après un tri topologique des variables, suivant $\lessdot_E$, qui donne $x_1 \ll x_2 \ll \ldots \ll x_n$, une substitution σ_E est obtenue comme la dernière substitution d'une suite de substitutions

   - $\sigma_0 = id$
   - si x_i apparaît dans un couple $(\{\ldots, x_i, \ldots\}, \{\!\{t\}\!\})$, $\sigma_{i+1} = \{x_i \mapsto \sigma_i(t)\} \cup \sigma_i$,
   - si x_i apparaît dans un couple $(\{\ldots, x_i, \ldots\}, \{\!\{\}\!\})$, où toutes les autres variables y sont telles que $y \ll x_i$ alors $\sigma_{i+1} = \sigma_i$,
   - si x_i apparaît dans un couple $(\{\ldots, x_i, \ldots\}, \{\!\{\}\!\})$, où il existe une autre variable y telle que $x_i \ll y$, alors $\sigma_{i+1} = \{x_i \mapsto y\} \cup \sigma_i$.

5. La relation $\lessdot_E$ est $x \lessdot_E z \lessdot_E \xi$ et $y \lessdot_E z$.

6. Si Fus n'est pas applicable, alors chaque variable apparaît une seule fois en partie droite. Si Dec n'est pas applicable, chaque membre gauche est réduit à un terme. Si Net n'est pas applicable, les membres gauches contiennent au moins deux variables ou le membre droit contient au moins un terme. Avec l'absence de cycle cela caractérise effectivement les formes résolues.

7. On définit sur E deux nombres.

   - $n_v(E)$ est le nombre total d'occurrences des variables dans les membres droits des couples (X, M). Si une variable apparaît deux fois , elle est comptée deux fois.
   - $n_f(E)$ est le nombre total d'opérateurs fonctionnels.

   On dit que $E \ggg F$ si et seulement si $n_v(E) > n_v(F)$ ou $n_v(E) = n_v(F)$ et $n_f(E) > n_f(F)$. L'ordre $\ggg$ termine clairement et on voit que Fus et Net réduisent n_v et Dec ne change pas n_v et réduit n_f.

8. Une solution d'un problème multi-équationnel est une substitution σ telle que pour chaque $(\{x_1, \ldots, x_p\}, \{\!\{t_1, \ldots, t_q\}\!\})$ on a $\sigma(x_1) = \ldots = \sigma(x_p) = \sigma(t_1) \ldots = \sigma(t_q)$.

Puisqu'il y a une variable x commune dans $X \cap X'$ on voit que $\sigma(x_1) = \ldots = \sigma(x_p) = \sigma(t_1) \ldots = \sigma(t_q) = \sigma(x) = \sigma(x'_1) = \ldots = \sigma(x'_{p'}) = \sigma(t'_1) = \ldots = \sigma(t'_{q'})$ et donc Fus préserve les solutions.

Net préserve clairement les solutions.

Dec préserve aussi les solutions. En effet (en gros), si $\sigma(s) = \sigma(t) = \sigma(u)$ pour chaque $u \in M$, alors $\sigma(Com(s,t)) = \sigma(u)$. D'autre part, pour chaque $p \in Pos(s)$ tel que $s_{|p} = x$, on a $\sigma(x) = \sigma(t_{|p})$; donc la multi-équation $(\{x\}, \{\!\{t_{|p}\}\!\})$ apparaît dans $Muleq(s,t)$ et vice-versa si elle apparaît alors il y a une position dans s où il y a une variable. $(\{x\}, \{\!\{t_{|p}\}\!\})$ est donc satisfaite avant et après Dec. On a le résultat pour t par symétrie.