Réecriture et Lamda-Calcul

Philippe Audebaud (DMI - ENS Lyon)

TD — Fiche 1

I. Systèmes de réduction

Ex 1. *En utilisant le même procédé que celui vu en cours sur les groupes, montrer que l'inverse à gauche l'est aussi à droite.*

Ex 2. *Proposer un système de réecriture qui rende compte des calculs de la* dérivation symbolique *; on se limitera à des fonctions polynômes, et on étudiera les questions de terminaison et de confluence du système proposé.*

Ex 3. *Soit* $\to_1$ *et* $\to_2$ *deux réductions sur un même ensemble* A*, telles que* $\to_1 \cup \to_2$ *est transitive. Montrer que* $\to_1 \cup \to_2$ *termine si, et seulement si* $\to_1$ *et* $\to_2$ *terminent.*

Ex 4. *Soit* $(\to_i)_{i\in I}$ *un ensemble de réductions définies sur un même ensemble* A*, telles que, pour tout couple* (i,j) *d'indices,* $\to_i$ *et* $\to_j$ *commutent. Montrer qu'alors* $\cup_{i\in I} \to_i$ *est confluente.*

Ex 5. *On se place sur le produit cartésien* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*. Le système de réecriture, défini pour tous* i*,* j *et* $k \geq 0$*, par :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} i+1, j & \longrightarrow & i, k \\ i, j+1 & \longrightarrow & i, j \end{array}\right.$$

est-il à branchement fini ? Termine t'il ?

Ex 6. *Mêmes questions pour le système :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} i+1, j & \longrightarrow & i, i \\ i, j+1 & \longrightarrow & i, j \end{array}\right.$$

Ex 7. *Montrer la terminaison de la fonction* $\mathtt{ack}(m,n)$ *définie sur* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *par*

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{ack}(0,n) & = & n+1 \\ \mathtt{ack}(m+1,0) & = & \mathtt{ack}(m,1) \\ \mathtt{ack}(m+1,n+1) & = & \mathtt{ack}(m,\mathtt{ack}(m+1,n)) \end{array}$$

Ex 8. *Considérons l'ensemble de règles suivant, transformant une formule propositionnelle en sa forme normale conjonctive :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \neg\neg x & \longrightarrow & x \\ \neg(x\vee y) & \longrightarrow & \neg x \wedge \neg y \\ \neg(x\wedge y) & \longrightarrow & \neg x \vee \neg y \\ x\vee(y\wedge z) & \longrightarrow & (x\vee y)\wedge(x\vee z) \\ (y\wedge z)\vee x & \longrightarrow & (y\vee x)\wedge(z\vee x) \end{array}\right.$$

Pour la grammaire de formules

$$\text{(Formules)} \quad x \quad ::= \quad a \mid x \wedge x \mid x \vee x \mid \neg x$$

construite sur les atomes a, déterminer une mesure $|x|$: *Formules* $\to \mathbb{N}^*$ *qui assure, pour chacune des règles $l \to r$ ci-dessus la monotonicité* $|l| >_{\mathbb{N}} |r|$.

Indication *Pour chaque connecteur de formule, on recherchera $|\cdot|$ sous la forme d'une fonction polynôme (ou presque !). Il est important de remarquer que la mesure doit essentiellement assurer la propagation des négations vers les atomes.*

Ex 9. *Soit $(A, >)$ un ordre strict. On définit sur $\mathcal{M}(A)$ la relation binaire $\succ$ telle que $M \succ N$ s'il existe $x \in M$ et $Y \in \mathcal{M}(A)$ tels que $N = (M \setminus \{x\}) \cup Y$ et pour tout $y \in Y$ $x > y$.*

Déterminer la clôture transitive de la relation $\succ$. Que peut-on en déduire ?

Ex 10. *(*A faire en salle machine*) Explorer l'Implantation les ordres lexicographique et multiensemble.*